

117

Библиотечка КВАНТ

ВЫПУСК

117 Библиотечка КВАНТ



Н.Б.ВАСИЛЬЕВ, А.А.ЕГОРОВ

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Часть 1



Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕКА
КВАНТ
ВЫПУСК

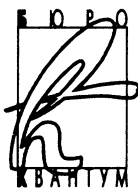
117

Приложение к журналу
«Квант» № 4/2010

Н.Б.Васильев, А.А.Егоров

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Часть 1



Москва
2010

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
В19

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Редакционная коллегия:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, Г.С.Голицын,
Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов, С.П.Новиков,
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов, А.И.Черноуцан

Васильев Н.Б., Егоров А.А.

В19 Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1. –
М.: Бюро Квантум, 2010. – 176 с. (Библиотечка «Квант». Вып.
117. Приложение к журналу «Квант» №4/2010.)

ISBN 978-5-85843-106-0

Сборник содержит более 200 задач, предлагавшихся на заключительных турах математических олимпиад СССР, начиная с самых первых. Задачи размещены в хронологическом порядке и снабжены решениями. Многие из них являются своеобразными математическими исследованиями, позволяющими читателям ознакомиться с идеями и методами современной математики.

Книга предназначена для школьников старших классов, учителей математики и руководителей математических кружков.

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-85843-106-0

© Бюро Квантум, 2010

Увлечение математикой часто начинается с размышлений над какой-то особенно понравившейся задачей. Она может встретиться и на школьном уроке, и на занятии математического кружка, и в журнале или книжке. Богатым источником таких задач служат различные олимпиады — от школьных и городских до международных.

В этой книге собрана полная коллекция задач заключительного тура математических олимпиад, проводимых по всей стране с начала 60-х годов. Задачи занумерованы подряд; по табличке, составленной для каждой олимпиады, можно восстановить наборы задач, предлагавшихся участникам в каждой из трех параллелей — в 8, 9 и 10 классах.

К задачам, предлагавшимся на олимпиадах 1961–1979 гг., приведены решения, задачи последних олимпиад (1980–1987) снабжены краткими указаниями.

Задачи первых олимпиад 60-х годов (они назывались всероссийскими) в среднем попроще, но и здесь встречаются замысловатые головоломки, подобрать ключ к которым нелегко. Самые трудные задачи помечены звездочкой.

Очень разнообразны задачи и по математическому содержанию.

Почти в каждом варианте олимпиадных заданий встречаются традиционные по формулировке задачи об окружностях и треугольниках, квадратных трехчленах и целых числах, уравнениях и неравенствах. Конечно, это не просто упражнения на проверку знаний и применение стандартных школьных приемов, а чаще всего теоремы, которые нужно доказать, задачи на отыскание множеств (геометрических мест), минимумов или максимумов, требующие некоторого исследования.

Значительно больше, однако, задач с далеко не стандартной формулировкой. Для поиска ответа и доказательства здесь нужны не столько школьные знания, сколько здравый смысл, изобретательность, умение логично рассуждать, перевести необычное условие на подходящий математический язык. Далеко не всегда решение такой задачи — цепочка из нескольких естественных шагов. Бывает, что, даже хорошо разобравшись в условии, долго не удастся найти правильный путь рассужде-

ний, руководящую идею, хотя готовое решение занимает всего несколько строк (что и отличает классическую олимпиадную задачу). Нужное соображение возникает иногда совершенно неожиданно, интуитивно, как некое «озарение». Эти моменты «открытия» и составляют радость математического творчества.

Конечно, идея, поначалу неожиданная, может затем встретиться еще и еще раз. (Скажем, красивая находка в задаче 7 – проследить, как меняется сумма всех чисел в таблице – в несколько ином преломлении оказывается полезной в задачах 151, 196, 271 и других.) И постепенно искусственное рассуждение начинает восприниматься уже как привычный, сознательно применяемый метод.

Проследить некоторые характерные приемы рассуждений, полезные не только в олимпиадных, но и в серьезных математических задачах – одна из целей «тематического путеводителя», помещенного в конце книги. В нем содержатся также краткие сведения об отдельных понятиях, теоремах, методах, лишь мимолетно затрагиваемых в школьном курсе или сейчас вовсе в него не входящих, но по традиции считающихся известными на олимпиадах. Это, прежде всего, метод математической индукции (П1), сведения о делимости целых чисел (П2), многочленов (П5), классическое неравенство между средними арифметическим и геометрическим (П8); номера П1, П2, ... означают ссылки на соответствующие темы путеводителя. На наш взгляд, он будет полезен руководителям математических кружков и тем, кто предпочитает заниматься задачами какого-то определенного характера и хотел бы их разыскать. Разумеется, путеводитель дает лишь некоторую весьма приблизительную ориентацию в огромном разнообразии задач и идей, встречающихся в их решении, – многие задачи могут быть отнесены одновременно к нескольким темам, другие настолько своеобразны, что при попытках более тонкой классификации для каждой пришлось бы завести отдельную «тему».

Ведь главная цель жюри каждой олимпиады – подобрать новые задачи, демонстрирующие школьникам свежие, еще не встречавшиеся им идеи, темы, постановки вопросов. Математики, члены жюри, придумывают такие задачи сами, узнают у своих коллег, черпают из малоизвестных книг или новых научных статей. (Нередко красивая лемма в научной работе опирается на элементарную идею, и из нее рождается олимпиадная задача – так возникли задачи 181, 219, 248, 267 и другие; а задача 148, специально придуманная для олимпиады, оказалась

в точности совпадающей с леммой из научной статьи, относящейся к современной алгебре.)

Часто, даже если сюжет задачи носит шуточный, игровой характер или взят из реальной жизни, вопрос, предлагаемый для исследования – найти оптимальный алгоритм поведения, наилучшую возможную оценку, максимум или минимум, – типичен для математики.

Во многих задачах о неравенствах, размещениях точек и покрытиях специалист узнает леммы из анализа, в задачах о знакомствах, дорогах и турнирах – варианты или частные случаи теорем теории графов. Характерные постановки задач о многократно повторяющихся операциях возникают во многих областях математики, в частности в программировании, теории динамических систем.

Таким образом, олимпиадные задачи позволяют приоткрыть завесу над серьезной математикой – классической и современной. Отчасти они даже отражают последние математические моды, – они, как и мода на одежду, меняются с годами.

Конечно, подготавливая набор задач для каждой олимпиады, члены жюри учитывают не только привлекательность формулировок и научную значимость отдельных задач. Олимпиада – это соревнования, где несколько предложенных задач нужно решить за 4–5 часов, и набор задач для каждого класса должен учитывать возможности и интересы участников: быть достаточно трудным, чтобы выявились победители, и в то же время достаточно простым и разнообразным, чтобы удовольствие и пользу получило большинство участников – и «геометры», и «алгебраисты», и любители комбинаторно-логических задач. В выборе задач видны и вкусы коллектива математиков, готовивших каждую олимпиаду, но также и многолетние традиции олимпиад, передающиеся от поколения к поколению.

* * *

Увлечение занимательными задачами имеет в нашей стране глубокие корни [61]: здесь можно вспомнить и учебники Ф.Магницкого и Л.Эйлера, и многочисленные сборники задач XIX века, и издававшийся с 1894 г. по 1917 г. в Одессе, а затем в Киеве журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики», предлагавший трудные задачи «на конкурс» своим читателям – учителям, студентам, учащимся гимназий и реальных училищ.

Первые олимпиады школьников в СССР были проведены более полувека тому назад, В 1934–1935 гг. городские математи-

ческие соревнования юных математиков состоялись в Ленинграде, Москве и Тбилиси, несколько позже – в Киеве. В послевоенные годы традиции разнообразной работы со школьниками (кружки при университетах, лекции, олимпиады) охватывали уже десятки городов. В конце 50-х годов идея вовлечения в эту работу школьников всей страны носилась в воздухе; интерес к науке, прежде всего математике и физике, стимулировался первыми полетами в космос, началом бурного развития вычислительной техники.

Сейчас уже трудно наверняка определить, кто первым предложил собрать вместе школьников – победителей математических олимпиад из разных городов. По-видимому, это был Борис Николаевич Делоне, замечательный математик, энтузиазму которого обязаны своим появлением и первые олимпиады в Ленинграде. Осенью 1959 г. на одной из традиционных топологических конференций в Тбилиси в экскурсионном автобусе рядом с Б.Н.Делоне оказалось несколько молодых математиков из разных городов, в их числе – И.В.Гирсанов и Д.Б.Фукс из Москвы, А.С.Шварц, работавший тогда в Воронеже. Речь зашла о математических олимпиадах в разных городах, об их победителях. И здесь же было решено для начала пригласить на заключительный тур Московской олимпиады старшеклассников хотя бы из нескольких городов и республик, где проводились олимпиады, написав письма знакомым математикам, а еще лучше – разослав официальные приглашения.

В Москве за осуществление этой идеи особенно активно взялся И.В.Гирсанов, в те годы – один из самых деятельных руководителей школьного математического кружка при МГУ. Ее реализация стала возможной благодаря поддержке ректора МГУ академика И.Г.Петровского и первого заместителя министра просвещения РСФСР профессора МГУ А.И.Маркушевича, впоследствии – вице-президента Академии педагогических наук. Здесь нельзя не отметить также И.С.Петракова, в те годы работавшего методистом Министерства просвещения РСФСР по математике, много сделавшего для организации системы олимпиад.

В становлении и развитии всероссийских и всесоюзных математических олимпиад особенно велика роль академика А.Н.Колмогорова. Андрей Николаевич был одним из руководителей первых московских олимпиад и школьного математического кружка при МГУ еще в 30-х годах. Авторитет А.Н.Колмогорова, одного из крупнейших ученых XX в., оказывал огромное влияние на перестройку математического образования, начатую

в 60-х годах. Это и существенная модернизация программ и стиля учебников для массовой школы, и организация специальных физико-математических школ-интернатов при крупнейших университетах. Неоднократно высказывавшаяся А.Н.Колмогорову идея о дифференциации образования в старших классах – о предоставлении всем школьникам возможности выбора наиболее интересующих их предметов для более глубокого изучения – еще ждет своего осуществления. Поддержав идею организации всероссийских олимпиад, А.Н.Колмогоров на долгие годы стал основным научным руководителем математической олимпиады. Позднее, когда был образован Центральный оргкомитет всесоюзной олимпиады по математике, физике и химии, А.Н.Колмогоров возглавил Методическую комиссию по математике при оргкомитете (его заместителями были в 60-е и 70-е годы М.И.Башмаков и Н.Б.Васильев, в конце 70-х годов – также Н.Х.Розов и А.Н.Земляков, в 80-е годы – В.Б.Вавилов и Ю.В.Нестеренко; председателем комиссии с 1983 г. стал академик АН УССР профессор МГУ Б.В.Гнеденко).

А.Н.Колмогоров несколько раз приезжал на заключительный тур, исполнял обязанности председателя жюри. С ним обсуждались все принципиальные вопросы – состав жюри, формы проведения олимпиад и их научная программа, содержание задач, итоги олимпиад. Андрей Николаевич считал очень важным участие в работе жюри молодых математиков, в том числе студентов – победителей прошлых олимпиад; тщательную подготовку к лекциям и разбору решений задач со школьниками; поощрение (в частности, упоминание в публикациях об олимпиадах) учителей, чьи ученики показали хорошие результаты. Живо интересовался Андрей Николаевич, отнюдь не лишенный спортивной жилки, и результатами «своих» учеников – школьников из ФМШ при МГУ. Несомненно, самый факт, что олимпиаду возглавляет академик А.Н.Колмогоров, помогал привлечь к участию в олимпиаде многих талантливых людей.

Итак, весной 1960 г. на Московскую олимпиаду впервые приехали группы школьников из девяти союзных республик и нескольких областей Российской Федерации. А в следующем, 1961 г. одновременно со вторым туром Московской олимпиады была проведена Первая Всероссийская олимпиада по математике, на которую собрались команды по четыре человека из большинства областей и республик (от Украины пригласили четыре команды). Следующие олимпиады стали уже вполне самостоятельными, хотя до 1965 г. проводились также в Москве. Уже на самых первых олимпиадах в числе победителей, кроме

признанных лидеров – москвичей и ленинградцев, были школьники из Казани, Киева, Еревана и других городов и республик.

Появилась возможность формировать представительную команду СССР на международные математические олимпиады (проводящиеся с 1959 г.). Как правило, советские школьники успешно выступают на этих олимпиадах и в командном первенстве занимают одно из первых мест.

Первые всероссийские олимпиады привели к расширению географии олимпиадного движения в стране – во всех областях и республиках постепенно стали проводиться свои олимпиады, победители которых становились участниками заключительного тура. К участию в местных олимпиадах и в заключительном туре активно подключались математики из разных городов. Уже с 1960 г. установилось тесное сотрудничество между Московским и Ленинградским университетами. Это касалось не только олимпиад, но и других форм работы со школьниками.

Многие интересные начинания исходили из Сибири. В Новосибирском Академгородке в эти годы под руководством академиков М.А.Лаврентьева и С.Л.Соболева и члена-корреспондента АН СССР А.А.Ляпунова создавался центр притяжения юных математиков и физиков всей азиатской части страны: по результатам Всесибирской заочной олимпиады большую группу школьников приглашали в летнюю школу, а затем лучшие из них могли поступать в созданную при НГУ физико-математическую школу-интернат. По инициативе группы академиков в 1963 г. такие школы были созданы при Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском университетах, позднее – и в других республиках; это также немало способствовало популярности олимпиад (вступительные экзамены в эти школы проводятся, как правило, на областных и республиканских олимпиадах).

Большую роль сыграло присоединение к олимпиадам физиков, особенно – активной группы комсомольцев из МФТИ (знаменитого на всю страну Физтеха), опиравшейся на поддержку ЦК ВЛКСМ. Возглавлял эту группу молодой преподаватель математики А.П.Савин (в нее входили, в частности, хорошо известные школьникам по журналу «Квант» физики, тогда еще студенты Л.Г.Асламазов, Ю.М.Брук, И.Ш.Слободецкий).

Если уже предаваться воспоминаниям, нужно сказать, что объединению усилий МГУ и МФТИ предшествовали горячие дискуссии. Дело в том, что в МФТИ придумали свою систему физико-математических олимпиад: студентам, аспирантам и преподавателям, разъезжавшимся на зимние каникулы, вручаются задачи и инструкции, как провести олимпиаду в родном

городе, а все работы школьников они привозят в Москву на проверку (и, конечно, на Физтех!). В тех городах, где уже имелись свои многолетние олимпиадные традиции, «конкуренция» разных олимпиад казалась многим ненужной. Андрей Николаевич Колмогоров еще долго вспоминал, как «ленинградцы не позволили Савину» проводить у себя физико-математическую олимпиаду МФТИ по такой схеме. Было решено проводить олимпиады по математике и физике по единой многоступенчатой системе, при которой главная роль в областных, городских, районных и школьных олимпиадах отводилась местным ученым, преподавателям и студентам вузов, учителям. Для руководства олимпиадой был образован центральный оргкомитет. В него вошли представители Министерства просвещения, ЦК ВЛКСМ, общества «Знание». Председателем оргкомитета долгие годы был замечательный физик академик И.К.Кикоин, принимавший, несмотря на свою занятость, живейшее участие во всех олимпиадных и школьных делах.

На первых олимпиадах в Москве заключительный тур по математике (в МГУ) и физике (в МФТИ) проводился почти одновременно, с таким расчетом, чтобы его участники могли попасть на олимпиаду по обоим предметам. По инициативе активистов из МФТИ победители олимпиады приглашались в молодежный лагерь ЦК ВЛКСМ «Орленок». Стали регулярно проводиться всесоюзные заочные олимпиады через газеты «Комсомольская правда», «Учительская газета» и местные молодежные газеты – их победители приглашались на очные республиканские и областные олимпиады (см. [4, 12, 14, 16, 17]).

Большую помощь организаторам местных олимпиад оказывали рассылаемые из Москвы списки рекомендованных задач, а также ставшие традиционными поездки студентов, аспирантов и преподавателей ведущих вузов страны на олимпиады в качестве представителей центрального оргкомитета. Кроме работы в жюри областных и республиканских олимпиад, им поручалось и много других дел: провести приемные экзамены в школы-интернаты, рассказать о вузах и вступительных экзаменах, обсудить с местными математиками и учителями постановку работы со школьниками, прочесть лекции; естественно, для этих поездок выбирались те, кто обладал уже достаточным опытом. Эти поездки имели большое воспитательное значение для самих студентов и аспирантов; многие из них позднее стали активными организаторами работы со школьниками.

Надо заметить, что, помимо энергии и времени молодых ученых, вся эта работа – особенно поездки на олимпиады,

организация летних школ – требовала немалых финансовых затрат. И тот факт, что, помимо органов народного образования, ее активно поддерживали ректоры МГУ, МФТИ и других вузов, Министерство высшего образования, Академия наук, ЦК ВЛКСМ и целый ряд других организаций, не имевших прямого отношения к школьникам, отражал всеобщее внимание к развитию научного потенциала страны, характерное для тех лет. (Отчасти его можно сравнить с нынешней всеобщей увлеченностью информатикой и компьютеризацией, но есть, конечно, существенные отличия – значительно больший, общегосударственный размах, необходимость существенно больших средств, отсутствие многолетнего предварительного опыта, какой имелся у математиков.)

Еще одна тема, которую нужно затронуть, рассказывая о развитии олимпиадного движения и других возникших в 60-е годы форм работы со школьниками, – выпуск учебной и научно-популярной литературы. В те годы (к сожалению, лишь до 1962 г.) выходили прекрасные периодические сборники «Математическое просвещение», адресованные студентам, учителям, любителям математики, где обсуждались также и педагогические вопросы. С 30-х годов издавалась серия брошюр «Популярные лекции по математике», адресованных в первую очередь школьникам. Уже вышли первые выпуски «Библиотеки математического кружка» [33]–[40], отражавшие опыт школьного математического кружка при МГУ. Для начинающих «олимпиадников» по инициативе А.Н.Колмогорова был издан наш небольшой сборник [5].

Говоря о литературе для школьников, нельзя не вспомнить, конечно, и о первых изданиях книг [20]–[22] из серии «Библиотека физико-математической школы», служивших образцовыми пособиями для учеников Всесоюзной заочной математической школы при МГУ. Академик И.М.Гельфанд, которому принадлежала идея создания такой школы (1964 г.), и сейчас является ее научным руководителем. ВЗМШ охватила уже не сотни, как интернаты, а тысячи, позднее – десятки тысяч школьников из самых далеких мест.

Тогда же, в середине 60-х годов, было задумано создание ежемесячного физико-математического журнала для школьников, хотя выходить этот журнал «Квант» начал лишь в 1970 г. В его организации основную роль сыграл коллектив математиков и физиков, сформировавшийся вокруг олимпиады; многие из них стали активными членами редколлегии, а академики И.К.Кикоин и А.Н.Колмогоров – постоянными руководителями редакции журнала. (В 1985 г., после кончины И.К.Кикоина, на

постах главного редактора «Кванта» и председателя Центрального оргкомитета олимпиады его заменил академик Ю.А.Осипьян.) «Квант» связан с олимпиадами не только генетически, но и существенной частью своего содержания, кругом читателей и авторов. Победители конкурса «Задачник Кванта» получают приглашения на республиканские олимпиады – в этом отношении «Квант» заменил и перевел на постоянную Основу заочные олимпиады 60-х годов.

Десятилетие 1965–1974 гг. – период «больших» олимпиад, проходивших в различных столицах союзных республик и нескольких городах России. Шестая Всероссийская олимпиада 1966 г. проходила в Воронеже – здесь впервые собрались представители всех областей РСФСР и всех республик. Следующая олимпиада в Тбилиси уже называлась 1-й Всесоюзной. По существу, все олимпиады 1961–1966 гг. можно было бы считать всесоюзными – на них были представители большинства союзных республик. Отсчет номеров с Тбилисской олимпиады 1967 г. связан с тем, что в этом году было образовано Министерство просвещения СССР, которое приняло на себя функции главного организатора олимпиад уже по трем предметам: математике, физике и химии. Хочется отметить постоянную заботу об олимпиадах со стороны министра просвещения М.А.Прокофьева и его заместителя М.И.Кондакова, а также с благодарностью вспомнить работников министерства, занимавшихся в те годы математическими олимпиадами, Н.А.Ермолаеву и Л.М.Пашкову. Олимпиада, став всесоюзной, еще несколько увеличилась – теперь на заключительный тур приезжали команды по 4 человека из всех областей не только России, но и Украины, Казахстана и других республик с областным делением. Кроме того, было решено приглашать дополнительно победителей (получивших первые и вторые премии) предыдущей олимпиады, чтобы дать возможность более полно представить сильные команды, так что число приезжих участников больших олимпиад, включая руководителей команд, 25–30 членов жюри, лекторов, членов оргкомитета, иногда доходило до 800 человек.

Варьировалась и форма проведения олимпиад. В 1968 г. по ленинградской традиции было решено попробовать провести олимпиаду в устной форме: вместо того чтобы записывать решения, участник олимпиады тихонько рассказывает свое решение группе из двух–трех членов жюри; если найдена неточность – у него остается еще возможность подумать над задачей (на каждую задачу дается три попытки). У многих неленинградцев эта система вызывала сомнения – как сравнивать требования

разных членов жюри, не возникнут ли языковые трудности, недопонимание, — и для страховки решили такой эксперимент провести во второй из двух дней соревнований, а в первый сохранить обычную форму письменной работы. Хотя очень четко организованный «устный тур» прошел гладко и всем понравился, но без большой группы опытных ленинградцев его больше никогда не решались повторять.

Все следующие олимпиады, однако, по образцу международных, было решено проводить в два дня, чтобы дать возможность тем, кто случайно потерпел неудачу в первый день, поправить свои дела, а главное, полнее использовать дни, отведенные на заключительный тур, куда многие школьники приехали за тысячи километров. При такой системе возможно и большее разнообразие в предлагаемых задачах. Например, в Риге (1971 г.) во второй день соревнований председатель жюри Я.М.Барздинь и его заместитель М.И.Башмаков предложили устроить «исследовательский тур»: участники должны были выбрать одну, самую интересную задачу и в ней постараться получить возможно более сильный результат. Этот эксперимент, одобренный А.Н.Колмогоровым, прошел весьма успешно; к нему возвращались (правда, в менее полной форме) и на некоторых следующих олимпиадах.

К сожалению, на всесоюзных олимпиадах не удалось осуществить идею, неоднократно высказывавшуюся А.Н.Колмогоровым: один из дней соревнований начать с лекции на заранее неизвестную участникам тему и затем предложить на эту тему несколько задач, продолжающих разобранные на лекции (такой эксперимент был успешно проведен лишь в 1985 году на 1-й Всесоюзной математической олимпиаде для учащихся СПТУ — лекцию на тему «геометрические вероятности» прочитал А.И.Плоткин).

К середине 60-х годов сформировался коллектив математиков из разных городов, игравших главную роль в подготовке и проведении олимпиад. Назовем некоторых из них: М.И.Башмаков, Ю.И.Ионин, А.И.Плоткин (Ленинград), А.К.Толпыго (Киев), Г.Ш.Фридман (Новосибирск—Омск), Г.А.Тоноян (Ереван), А.Д.Бендукидзе (Тбилиси), М.И.Серов (Вологда—Петрозаводск), Е.А.Морозова, В.М.Алексеев, Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, М.С.Дубсон, А.А.Егоров, Б.М.Ивлев, Н.Н.Константинов, Ю.П.Лысов, Ж.М.Раббот, А.П.Савин, В.А.Скворцов, Д.Б.Фукс (Москва). Разумеется, состав постоянно работающей методической комиссии и жюри менялся, к нему присоединялись новые активные помощники из Москвы и других городов.

Назовем еще ряд математиков из тех, кто участвовал в 70-е годы во многих олимпиадах и оказал существенное влияние на их проведение: В.Б.Алексеев, А.А.Берзиньш, И.Н.Бернштейн, Г.А.-Гальперин, М.Л.Гервер, А.Г.Гейн, А.Н.Земляков, И.Н.Клумова, А.В.Кочергин, А.Г.Кушниренко, С.А.Мазуров, Н.Х.Розов, С.В.Фомин, С.А.Тресков, В.М.Харламов, Г.Н.Яковлев.

В последние годы в организации олимпиад особенно активную роль играют В.В.Вавилов, Ю.В.Нестеренко, С.В.Конягин, Л.П.Купцов, С.В.Резниченко, И.Н.Сергеев, А.М.Слинько, Ю.П.Соловьев (Москва), А.С.Меркурьев, Н.Ю.Нецветаев (Ленинград); А.В.Анджанс (Рига), В.И.Берник, И.К.Жук (Минск), Д.Г.Флаас, Е.И.Хухро (Новосибирск), Н.В.Карташов (Киев); Б.И.Чиник (Кишинев).

Какие же задачи ставили перед олимпиадами ее организаторы? Помимо выявления победителей, формирования команды СССР на международную олимпиаду, привлечения одаренных и серьезно увлекающихся наукой школьников в ведущие вузы страны, важной целью олимпиады было развитие интереса школьников к математике, вовлечение в постоянную работу с ними большего числа преподавателей и студентов вузов, научных сотрудников, учителей, установление постоянных контактов между энтузиастами математического просвещения. В самом деле, олимпиада играла роль «связующего стержня» различных форм работы с школьниками, возникших почти одновременно в 1963–1965 гг. и получивших затем широкое распространение – таких как заочные конкурсы, летние лагеря, специализированные физико-математические, заочные математические школы.

На заключительном туре, да и на других этапах олимпиады, где собираются участники из разных городов, самым ценным является возникающее общение между взрослыми и юными математиками.

Большое значение имеет сотрудничество членов жюри, приезжающих из Москвы, Ленинграда и других городов, с математиками из города, где проводится олимпиада. (Как правило, один из двух «старших» по каждому классу, а также председатель жюри из города-устроителя.) Участие местных математиков – их советы, предложенные ими задачи – во многих случаях способствовало успеху олимпиады. В свою очередь, ими с одобрением воспринимались традиции центрального жюри: тщательная подготовка задач; многократная проверка работ школьников, позволяющая выявить новые идеи решений и возникшие «нюансы»; открытый и демократичный стиль всех обсуждений; подробный индивидуальный разбор работ, проходящий в атмос-

фере доброжелательных отношений между членами жюри и участниками. Особенно внимательны были члены жюри «больших» олимпиад при проверке работ восьмиклассников и учеников из сельских «далеко не математических» школ, авторы которых испытывали большие трудности в записи решений непривычных задач. В отличие от экзаменов, требования к оформлению работ на олимпиаде были достаточно либеральными: скажем, если изложены все основные логически важные этапы, а детали выкладок остались лишь в черновиках – оценка не снижалась. Подробнее на работе жюри мы не будем останавливаться – она в основных чертах следовала давним традициям Московской олимпиады (см. [9], [13]).

В научной программе всесоюзных олимпиад, кроме самих соревнований и разбора работ, предусматривается дополнительное время для встреч со школьниками: местные и приезжие ученые выступают перед ними с лекциями. Можно только позавидовать школьникам, которым довелось слушать лекции А.Н.Колмогорова. Не раз в качестве лекторов выступали и молодые, но уже получившие известность математики – бывшие победители олимпиад. Для восьмиклассников часто устраивались занятия в виде «математического кружка» (одно из них обычно вел Н.Н.Константинов). На олимпиаду для встреч со своими учениками приезжали преподаватели ВЗМШ. Традиционной стала встреча с редколлегией журнала «Квант».

При всей занятости члены жюри считали очень важным найти время для обстоятельных бесед с местными работниками народного образования и руководителями команд – учителями, методистами и математиками, приехавшими со всей страны. Речь шла не только об олимпиаде и конкретных работах школьников, но и о разнообразных вопросах, связанных с положением дел в массовой школе, о содержании и различных формах дополнительного математического образования.

О том, как проходила каждая олимпиада – насыщенный разнообразными впечатлениями, экскурсиями, встречами праздник для ее участников, завершающийся торжественным награждением победителей, – мы, конечно, не имеем возможности здесь рассказать (см. [78–80]).

С 1975 г. в связи с организационными трудностями было принято решение изменить структуру олимпиадной «пирамиды»: включить в нее республиканские олимпиады в РСФСР и других больших республиках, а число участников заключительного тура сократить. (Надо сказать, что математики возражали против такого изменения, – уж слишком много «ярусов» нужно

преодолеть участникам, – но физики и химики его поддержали: они получили возможность, как принято на международных олимпиадах, проводить для всех участников «экспериментальный тур».)

Всесоюзная математическая олимпиада школьников проходит теперь в пять этапов: школьный, городской и районный, областной, республиканский и заключительный – всесоюзный. На него приглашают школьников 8–10 классов – победителей республиканских олимпиад: 48 от РСФСР, 12 от Украины, по 6 от Белоруссии, Казахстана и Узбекистана, по 3 от других союзных республик, городов Москвы, Ленинграда и города-участника олимпиады, кроме того, команды ряда физико-математических школ-интернатов, а также победители заключительного тура предыдущего года – всего около 150 школьников.

Конечно, при этом олимпиада приобрела еще более «спортивный» характер. К старым традициям, которые во многом сохранились, добавились и некоторые новые; среди них – «математический бой» между сборными командами жюри и школьников. (Если команду жюри возглавляет бывший чемпион нескольких олимпиад С.В.Конягин, она, как правило, одерживает трудную победу.)

Сейчас функции «связующего стержня», которые в 60-е и 70-е годы выполнял заключительный тур, в значительной степени должны быть отнесены к предшествующим этапам – республиканским и областным олимпиадам, где работа часто возглавляется молодыми учеными – бывшими победителями олимпиад. Самым массовым и, быть может, главным в «пирамиде олимпиад» является не вершина, а скорее ее основание – школьные, районные, городские и областные олимпиады, проводимые местными математиками и учителями – настоящими энтузиастами своего дела. Ведь математика нужна не только будущим ученым, и основная цель олимпиадного движения – не «выращивание олимпиадных чемпионов», а зарождение и развитие постоянного интереса к математике, расширение кругозора школьников. Эта работа успешно проводится там, где олимпиады составляют часть продуманных, хорошо организованных занятий со школьниками и студентами – будущими учителями [11]. По итогам заключительного тура за несколько лет можно отчасти оценить результаты этой работы; отметим, в частности, постоянство успехов ленинградцев, удачные выступления школьников Латвии и Белоруссии за последние годы.

Конечно, добраться до верхних ступеней олимпиадной пирамиды – дело не простое: помимо математических способностей и

большой подготовительной работы, для побед на олимпиадах требуются особые качества «спортсмена-многоборца», умение быстро переключаться с одной задачи на другую – черты характера, вовсе не обязательные даже для профессионала-математика. В связи с этим мы хотим привести один абзац из предисловия, написанного А.Н.Колмогоровым – редактором книги [5]; в той или иной форме Андрей Николаевич постоянно высказывал эту мысль перед участниками олимпиад.

«Наша страна нуждается в большом числе хорошо подготовленных и талантливых математиков. Очень важно, чтобы профессию математика выбирали те представители нашей молодежи, которые могут работать в этой области наиболее продуктивно. Одним из путей привлечения одаренной молодежи к математике являются математические олимпиады. Участие в школьных и математических кружках и олимпиадах может помочь каждому оценить свои собственные способности, серьезность и прочность своих увлечений математикой... Желая читателям сборника всяческих успехов в решении задач и побед на школьных, городских, Всероссийских олимпиадах, я хочу в то же время заметить, что пути к серьезной работе в области математической науки разнообразны. Одним легче дается решение замысловатых задач, другие вначале не выделяются на этом поприще, но, двигаясь медленно, овладевают глубоко и серьезно теорией и несколько позднее научаются работать самостоятельно. В конечном счете при выборе математики как предмета основных интересов и работы на долгое будущее каждый должен руководствоваться собственной самооценкой, а не числом премий и похвальных отзывов на олимпиадах.»

* * *

Хотя полезность увлечения «спортивной» стороной олимпиад и безусловна, но в опыте прежних олимпиад есть и непреходящая ценность: это – интересные задачи. За последние годы вышло несколько сборников таких задач [9], [41]. Многие из олимпиадных задач заслуживают значительно более глубокого обдумывания, чем позволяет несколько часов, отведенных на соревнованиях. Особенно это относится к неоднократно предлагавшимся на всесоюзных олимпиадах «исследовательским» задачам, решения (или обобщения) которых – по существу небольшие научные работы, содержащие интересный результат. Зачастую такие задачи представлены в виде серии усложняющихся вопросов; их больше всего в олимпиадах 70-х годов. Многие из этих задач относятся к дискретной математике, где нетривиаль-

ный результат нередко основан на хитроумных, но вполне элементарных конструкциях и рассуждениях.

Тема одной из них (158) – о «переключательных схемах» – была, по-видимому, впервые предложена А.Н.Колмогоровым на студенческом семинаре в 1957 г. (основную конструкцию, изображенную на рисунке 3 к условию задачи, придумал участник этого семинара, однокурсник авторов Ю.П.Офман).

Присланная в редакцию журнала «Квант» студентом из г.Черновцы Э.Туркевичем задача о коммутирующих многочленах (251) заинтересовала специалистов по алгебре и анализу, в том числе И.Н. Бернштейна, – он и переделал ее в олимпиадную задачу, добавив несколько промежуточных «ступенек» (пунктов). Затем дальнейшим изучением этой темы занимались ученики 145-й математической школы г.Киева под руководством А.К.Толпыго и ФМШ при МГУ («колмогоровской» школы-интерната) под руководством А.П.Веселова.

Любопытный, хотя, пожалуй, и уникальный случай произошел с задачей 128 – довольно искусственным на вид «циклическим неравенством» – продолжая ею заниматься, один из победителей олимпиады В.Г.Дринфельд сделал свою первую научную работу (см. комментарий к решению задачи).

Мы не можем, разумеется, подробно рассказать о каждой интересной задаче всесоюзных олимпиад. В конце книги перечислен ряд красивых задач разной трудности – указаны их авторы, номера в книге и для некоторых – «кличка», по которой их вспомнят знатоки. Разумеется, этот список, отражающий мнение авторов и их коллег, отчасти произволен: другие математики составили бы его иначе.

Решения многих задач записаны в книге коротко, иногда это скорее подробные указания, разобраться в которых и довести решение до конца стоит определенного труда. Мы приводим, как правило, лишь одно из возможных решений, которое показалось нам более поучительным (или позволяющим получить более общий результат). Лишь к отдельным задачам даны два решения, основанные на различных идеях. В комментариях к решениям отдельных задач (после значка ∇) обсуждаются возможные обобщения.

Собранные в этой книге задачи – итог работы большого коллектива математиков разных поколений, со многими из которых авторов связывает многолетняя дружба. Мы хотели бы выразить им глубокую благодарность.

Подготовка книги была начата несколько лет назад по инициативе академика А.Н.Колмогорова. По первоначальному плану

в нее должны были войти лишь задачи олимпиад 60-х и 70-х годов, в которых авторы принимали непосредственное участие. По предложению редактора книги А.П.Савина, активное участие которого в олимпиадах на протяжении уже 30 лет должно быть особо отмечено, в книгу были добавлены, в качестве задач для самостоятельного решения, задачи последних всесоюзных олимпиад. (Краткие указания к ним, написанные А.А.Егоровым, в основном следуют решениям, опубликованным в журнале «Квант».) Среди ветеранов олимпиадного движения мы считаем необходимым выделить Н.Н.Константинова, энтузиазму которого обязаны своим появлением и развитием новые формы работы со школьниками, продолжающие традиции первых олимпиад [81].

Мы признательны всем, чьи советы и помощь помогли при подготовке книги, прежде всего М.И.Башмакову, В.Л.Гутенмахеру, Ж.М.Рабботу, Ю.П.Соловьеву, А.Б.Сосинскому, В.М.Тихомирову, А.К.Толпыго, Д.Б.Фуксу.

Мы были бы рады получить от читателей письма с замечаниями, новыми решениями и результатами; просьба присылать их в адрес редакции журнала «Квант».

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Первая Всероссийская олимпиада, 1961 г. (Москва)

Класс	Задачи				
8	1	2	3	4	5а
9	6а	7	8	9	10
10	11	12	7	6б	5б

1. Дана фигура, состоящая из 16 отрезков (рис.1). Докажите, что нельзя провести ломаную, пересекающую каждый из отрезков ровно один раз. (Ломаная может быть незамкнутой и самопересекающейся, но ее вершины не должны лежать на отрезках, а стороны — проходить через вершины фигуры.)

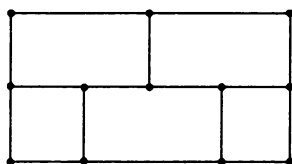


Рис. 1

2. С центрами в вершинах прямоугольника построены четыре окружности 1, 2, 3, 4 с радиусами r_1, r_2, r_3, r_4 , причем $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 < d$; d — диагональ прямоугольника (рис.2). Проводятся две пары внешних касательных к окружностям 1, 3 и 2, 4. Докажите, что в четырехугольник, образованный этими четырьмя прямыми, можно вписать окружность.

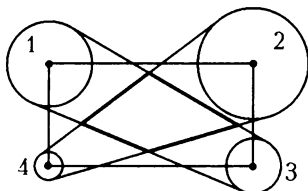


Рис. 2

3. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

4. Дана таблица 4×4 клетки, в некоторых клетках которой расставляются звездочки. Докажите, что можно так расставить семь звездочек, что при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда будет хотя бы одна звездочка. Докажите, что если звездочек меньше чем семь, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

5. а) Дана четверка положительных чисел (a, b, c, d) . Из нее получается новая (ab, bc, cd, da) по следующему правилу: каждое число умножается на следующее, четвертое — на первое. Из новой четверки по этому же правилу получается третья и т.д. Докажите, что в полученной последовательности четверок никогда не встретится (a, b, c, d) , кроме случая, когда $a = b = c = d = 1$.

б) Дан произвольный набор из чисел 1 и -1 длиной 2^k . Из него получается новый по следующему правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее 2^k -е число умножается на первое. С новым набором из 1 и -1 проделывается то же самое и т.д. Докажите, что в конце концов получится набор, состоящий из одних единиц.

6. а) Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям с центрами O_1 и O_2 соответственно (по часовой стрелке). Докажите, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.

б) Расстояния от фиксированной точки P плоскости до двух вершин A, B равностороннего треугольника ABC равны $AP = 2$, $BP = 3$. Определите, какое максимальное значение может иметь расстояние CP .

7. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце и в любой строке, неотрицательны.

8. n точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки можно пройти в каждую из остальных по этим отрезкам, причем нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Докажите, что общее число отрезков равно $n - 1$.

9. a, b, p — любые целые числа. Докажите, что найдутся такие взаимно простые k, l , что $ak + bl$ делится на p .

10. Коля и Петя делят $2n + 1$ орехов, $n \geq 2$, причем каждый хочет получить возможно больше. Предполагаются три способа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-й этап: Петя делит все орехи на две части, в каждой не меньше двух орехов.

2-й этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

(1-й и 2-й этапы общие для всех трех способов.)

3-й этап: при первом способе Коля берет большую и меньшую части; при втором способе Коля берет обе средние части; при третьем способе Коля берет либо большую и меньшую части, либо обе средние части, но за право выбора отдает Пете один орех.

Определите, какой способ самый выгодный для Коли и какой наименее выгоден для него.

11. Докажите, что для любых трех бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots,$$

найдутся такие номера p и q , что $a_p \geq a_q$, $b_p \geq b_q$, $c_p \geq c_q$.

12. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

**Вторая Всероссийская олимпиада,
1962 г. (Москва)**

Класс	Задачи				
8	13	14	15	16	17
9	18	19	20	21	17
10	22	23	24	25	26

13. На продолжениях сторон AB , BC , CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A' , B' , C' , D' так, что $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$, $\overline{DD'} = \overline{CD}$ и $\overline{AA'} = \overline{DA}$. Докажите, что площадь четырехугольника $A'B'C'D'$ в 5 раз больше площади четырехугольника $ABCD$.

14. На плоскости заданы окружность s и прямая l , проходящая через центр O окружности s . Через точку O проводится произвольная окружность s' с центром на прямой l . Найдите множество точек M , в которых общая касательная окружностей s и s' касается окружности s' .

15. Даны целые положительные числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$. Известно, что $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \dots, a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Докажите, что $a_{100} > 2^{99}$.

16. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d таких, что выражение $ax^3 + bx^2 + cx + d$ равно 1 при $x=19$ и равно 2 при $x=62$.

17. В каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$, где n нечетно, вписано одно из чисел 1 или -1 (произвольным образом). Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце, справа от каждой из строк пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма всех $2n$ написанных произведений не равна нулю.¹

18. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медианы, проведенные к этим сторонам, пересекались под прямым углом.

19. a, b, c, d – положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

20. Дан правильный пятиугольник; M – произвольная точка внутри него (или на его границе). Занумеруем расстояния от точки M до сторон пятиугольника (или их продолжений) в порядке возрастания: $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_5$. Найдите все положения точки M , при которых величина r_3 принимает наименьшее значение, и все положения точки M , при которых величина r_3 принимает наибольшее значение.

21. Возьмем любое 1962-значное число, делящееся на 9. Сумму его цифр обозначим через a , сумму цифр числа a через b , сумму цифр b – через c . Чему равно c ?

22. Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MN на сторону BC . Точка P – середина отрезка MN . Докажите, что $AN \perp BP$.

23. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого a, b, c заключены в следующих пределах:

$$0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3?$$

24. x, y, z – произвольные попарно неравные целые числа. Докажите, что $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ делится на $5(y - z)(z - x)(x - y)$.

25. Про числа a_0, a_1, \dots, a_n известно, что $a_0 = a_n = 0$ и что $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0$ при всех k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$). Докажите, что все a_k неположительны.

26. Даны положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ причем $a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Докажите, что в пустую таблицу из m строк и n столбцов можно поставить не более чем $m + n - 1$ положительных чисел так, чтобы сумма чисел в i -й строке равнялась a_i , а сумма чисел в k -м столбце равнялась b_k .

¹ В 8 классе задача предлагалась для $n = 25$.

Класс	Задачи				
8	27	28	29a	30	31a
9	32	33	34	31b	28
10	35	36	37	29b	28
11	38	28	39	40	29b

27. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Докажите, что найдется точка, через которую проходят все пять окружностей.

28. В шахматном турнире участвовало 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

29. а) Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

б) Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что каждая из диагоналей AD , BE и CF делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

30. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен 1 или 2.

31. На окружности две точки A и B зафиксированы, а точка M пробегает всю окружность. Из середины K отрезка MB опускается перпендикуляр KP на прямую MA .

а) Докажите, что все прямые KP проходят через одну точку.

б) Найдите множество точек P .

32. Дан равносторонний треугольник со стороной 1. При каком наименьшем d отрезок длины d может, скользя концами по сторонам треугольника, замести его целиком?

33. Шахматная доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 2×1 (каждая кость покрывает две клетки). Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

34. Даны n различных положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Из них составляют всевозможные суммы с любым числом слагаемых (от 1 до n). Докажите, что среди этих сумм найдется по крайней мере $n(n+1)/2$ попарно различных.

35. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B . Затем из вершины C проведены прямые, параллельные

этим биссектрисам. Точки D и E пересечения этих прямых с биссектрисами соединены. Оказалось, что прямые DE и AB параллельны. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

36. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, члены которой – целые положительные числа. Один из них – полный квадрат. Докажите, что прогрессия содержит бесконечно много квадратов.

37. Дан правильный 45-угольник. Можно ли расставить в его вершинах цифры 0, 1, ..., 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

38. Найдите такие вещественные числа a, b, p, q , чтобы равенство

$$(2x - 1)^{20} - (ax + b)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}$$

выполнялось при любых x .

39. В концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам, и в ее середине пишется сумма чисел, стоящих в концах (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в ее середине пишется число, равное сумме чисел, стоящих в концах дуги (второй шаг). Такая операция повторяется n раз. Найдите сумму всех записанных чисел.

40. Дан равнобедренный треугольник. Найдите множество точек, лежащих внутри треугольника, расстояние от которых до основания равно среднему геометрическому расстояний до боковых сторон.

Четвертая Всероссийская олимпиада, 1964 г. (Москва)

Класс	Задачи				
8	41	42	43	44	45a
9	41	46	47	48	49
10	50	51	45a,6	52	53
11	54	55	52	53	44

41. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

42. Докажите, что $m(m+1)$ не является степенью целого числа ни при каком натуральном m .

43. У каждого из чисел от 1 до 1000000000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел

снова подсчитывается сумма его цифр и т.д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел: получится больше: 1 или 2?

44. Дан произвольный набор n целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}$. Из него получается новый набор:

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2},$$

из этого набора – следующий по тому же правилу и т.д. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то все первоначальные числа равны.

45. а) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Докажите, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

б) Обратно, докажите, что из шести отрезков, длины которых $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ удовлетворяют соотношениям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, можно построить выпуклый шестиугольник с равными углами.

46. Решите в целых числах уравнение

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}}{1964} = y.$$

47. Из вершин выпуклого четырехугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры на его диагонали. Докажите, что четырехугольник, образованный их основаниями, подобен исходному.

48. Найдите все нечетные натуральные n , для которых $(n-1)!$ не делится на n^2 .

49*. На плоскости нарисовала сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1 (рис.3). Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из узла A в узел B по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину всего пути он полз в одном направлении.

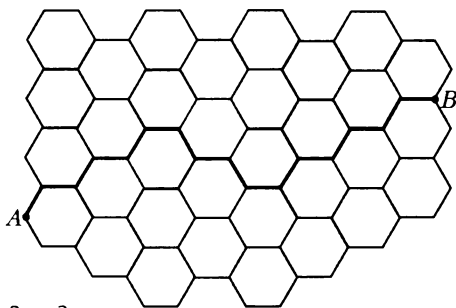


Рис. 3

50. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что сумма углов AOB COD равна 180° .

51. a , b и n — фиксированные натуральные числа. Известно, что при любом натуральном k ($k \neq b$) число $a - k^n$ делится без остатка на $b - k$. Докажите, что $a = b^n$.

52. В выражении $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ для указания порядка действий расставляются скобки и результат записывается в виде дроби:

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{n-k}}}$$

(при этом каждая из букв x_1, x_2, \dots, x_n стоит либо в числителе дроби, либо в знаменателе). Сколько различных выражений можно таким образом получить при всевозможных способах расстановки скобок?

53. На какое наименьшее число неперекрывающихся тетраэдров можно разбить куб?

54. Найдите наибольший полный квадрат такой, что после вычерчивания двух его последних цифр получается снова полный квадрат. (Предполагается, что одна из вычеркиваемых цифр — не ноль.)

55. $ABCD$ — описанная трапеция; E — точка пересечения диагоналей AC и BD ; r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABE , BCE , CDE , DAE соответственно. Докажите, что

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

Пятая Всероссийская олимпиада, 1965 г. (Москва)

Класс	Задачи				
8	56a	57	58	59	60
9	61	62	63	64	65
10	566	66	67a	68a	69
11	63	676	70	686	71

56. а) Каждое из чисел x_1, x_2, \dots, x_n может независимо от остальных принимать значение 1, 0 или -1 . Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений этих n чисел?

б) Какое наименьшее значение может принимать сумма всевозможных попарных произведений n чисел x_1, x_2, \dots, x_n , каждое из которых по абсолютной величине не превосходит единицы?

57. Имеется доска 3×3 клетки и 9 карточек размером в одну клетку, на которых написаны какие-то числа. Двое играющих по очереди кладут эти карточки на клетки доски. После того, как все карточки разложены, первый (начинающий) подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в левом и правом столбцах. Выигрывает тот, у кого сумма больше. Докажите, что при правильной игре первого второй не сможет выиграть независимо от того, какие числа написаны на карточках.

58. Около треугольника ABC описана окружность. Хорды, соединяющие середину дуги AC с серединами дуг AB и BC , пересекают стороны AB и BC в точках D и E . Докажите, что отрезок DE параллелен стороне AC и проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC .

59. Номер автобуса — шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трех цифр номера равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

60*. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает отрезок поверхности моря длиной a (рис.4). Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси так, что конец его луча перемещается со скоростью v . Докажите, что катер, имеющий максимальную скорость $v/8$, не сможет подойти к острову, не попав в луч прожектора.

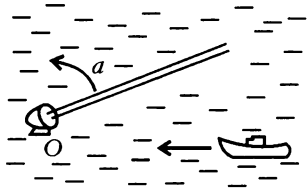


Рис. 4

61. В дружной компании 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят трое. Докажите, что нельзя так организовать график дежурств, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

62. Какое наибольшее значение может принимать длина отрезка, отсекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию, если периметр треугольника равен $2p$?

63. n^2 чисел x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют системе из n^3 уравнений:

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Докажите, что существуют такие числа a_1, a_2, \dots, a_n , что $x_{ij} = a_i - a_j$ для любых i и j .

64*. Можно ли разместить 1965 точек в квадрате со стороной 1 так, чтобы любой прямоугольник площади $1/200$ со сторона-

ми, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри хотя бы одну из этих точек?

65*. Округлением числа называется замена его одним из двух ближайших целых чисел.

Даны n чисел. Докажите, что можно так округлить их, чтобы сумма любых m округленных чисел ($1 \leq m \leq n$) отличалась от суммы этих же неокругленных чисел не более чем на $(n+1)/4$.

66. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда может это сделать.

67. а) Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовали по 10 человек, причем никакие два из членов комиссии не были вместе на заседаниях более одного раза. Докажите, что число членов комиссии больше 60.

б) Докажите, что из 25 человек нельзя составить больше 30 комиссий по 5 человек в каждой, чтобы никакие две комиссии не имели больше одного общего члена.

68*. Даны два взаимно простых числа $p > 0$ и $q > 0$. Целое число n называется хорошим, если его можно представить в виде $n = px + qy$, где x и y — целые неотрицательные числа, и плохим — в противном случае. а) Докажите, что существует такое целое число c , что из двух целых чисел n и $c - n$ всегда одно хорошее, а другое — плохое. б) Сколько всего плохих неотрицательных чисел?

69. Самолет-разведчик летает по кругу с центром в точке A . Радиус круга 10 км, скорость самолета — 1000 км/ч. В некоторый момент из точки A выпускается ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолет, и управляется так, что она все время находится на прямой, соединяющей самолет с точкой A . Через какое время после запуска ракета догонит самолет?

70. Докажите, что сумма длин ребер многогранника больше $3d$, где d — расстояние между наиболее удаленными вершинами многогранника.

71*. На планете, имеющей форму шара, живет один житель, который может передвигаться по поверхности планеты со скоростью, не большей u ; к этой планете подлетает космический корабль, который может двигаться со скоростью v . Докажите, что если $v/u > 10$, то с корабля можно увидеть жителя планеты, как бы тот ни пытался скрыться.

**Шестая Всероссийская олимпиада,
1966 г. (Воронеж)**

Класс	Задачи				
8	72	73а	74	75а	76
9	77	73б	75б	78	79
10–11	75б	80	81	82	83

72. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

73. а) Точки B и C лежат внутри отрезка AD . Докажите, что если AB равно CD , то для любой точки P плоскости выполняется неравенство: $PA + PD \geq PB + PC$.

б) На плоскости отмечены точки A, B, C и D . Известно, что для любой точки P выполняется неравенство $PA + PD \geq PB + PC$. Докажите, что точки B и C лежат на отрезке AD и $AB = CD$.

74. Существуют ли такие натуральные числа x и y , для которых $x^2 + y$ и $y^2 + x$ – квадраты целых чисел?

75. а) Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его ростом. Докажите, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту и шеренгу семиклассников тоже выстроить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

б) Полк солдат выстроен в виде прямоугольника таким образом, что в каждой шеренге солдаты стоят по росту. Докажите, что если в каждой колонне перестроить солдат тоже по росту, то в каждой шеренге они по-прежнему будут стоять по росту.

76. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $ABCD$, стороны которого лежат на линиях сетки, причем AD в k раз больше AB (k – целое число). Рассматриваются всевозможные пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C . Докажите, что среди этих путей таких, в которых первое звено лежит на AD , в k раз больше, чем таких, в которых первое звено лежит на AB .

77. Числа a_1, a_2, \dots, a_n таковы, что $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1$, $a_2 \leq a_3 \leq 2a_2$; ...; $a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$. Докажите, что в сумме $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ можно так выбрать знаки, чтобы было $0 \leq s \leq a_1$.

78. Докажите, что в выпуклый четырехугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P .

79. В некотором городе для любых трех перекрестков A , B и C есть путь, ведущий из A в B и не проходящий через C . Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути (перекресток – место, где сходятся по крайней мере две улицы; в городе не меньше двух перекрестков).

80. Дан треугольник ABC . Рассматриваются всевозможные тетраэдры $PABC$, у которых наименьшей из высот является PH (H – проекция точки P на плоскость ABC). Найдите множество точек H .

81*. На плоскости даны 100 точек. Докажите, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше единицы (расстояние между двумя непересекающимися кругами – это расстояние между их ближайшими точками).

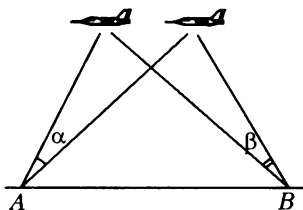


Рис. 5

82. Из двух точек A и B , расстояние между которыми равно d км, одновременно в течение одной секунды наблюдают за самолетом, летящим по прямой с постоянной скоростью (рис.5). Из точки A сообщили, что самолет сместился за эту секунду на угол α , а из точки B – что самолет сместился на угол β (углы α и β острые). Какую наименьшую скорость мог иметь самолет?

83*. Написано 20 чисел: 1, 2, ..., 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки «+» или «-» (знак можно ставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех 20 знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй?

1-я Всесоюзная олимпиада, 1967 г. (Тбилиси)

Класс	Задачи				
8	84а	85а	86а	87	88
9	87б	86а	85б	84б	88
10	90	86б	91	92	93

84. а) В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM . Докажите, что угол ABC не больше 60° .

б) В остроугольном треугольнике ABC высота $АН$ равна медиане $ВМ$ и равна биссектрисе CD . Докажите, что треугольник ABC правильный.

85. а) В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Докажите, что сумма полученного числа с исходным не равна $\underbrace{999\dots 9}_{1967 \text{ цифр}}$.

б) Цифры некоторого числа переставили и сложили полученное число с исходным. Докажите, что если сумма равна 10^{10} , то исходное число делилось на 10.

86. а) Проектор освещает угол 90° . Докажите, что расположенные в четырех произвольных точках плоскости прожектора можно направить так, чтобы осветить всю плоскость.

б) В каждой из восьми точек пространства стоит прожектор, который освещает октант (трехгранный угол со взаимно перпендикулярными ребрами) с вершиной в этой точке. Докажите, что можно направить прожектора так, чтобы они осветили все пространство.

87. а) Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, 2, 9 так, чтобы любые два соседних отличались на 3, 4 или 5?

б) Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, ..., 13 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

88. Докажите, что существует число, делящееся на 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

89*. Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

90. В последовательности целых (положительных) чисел каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих. Какое наибольшее число членов может иметь такая последовательность, если каждый ее член не превосходит 1967?

91. «КОРОЛЬ-САМОУБИЙЦА». На шахматной доске размером 1000×1000 стоит черный король и 499 белых ладей. Докажите, что при произвольном начальном расположении фигур король может стать под удар белой ладьи, как бы ни играли белые. (Ходы делаются так же, как и в обычных шахматах.)

92. Три последовательные вершины ромба лежат соответственно на сторонах AB , BC , CD данного квадрата со стороной 1. Найдите площадь фигуры, которую заполняют четвертые вершины таких ромбов.

93*. Натуральное число k обладает таким свойством: если n делится на k , то и число, записываемое теми же цифрами, что и n , в обратном порядке, делится на k . Докажите, что k – делитель числа 99.

2-я Всесоюзная олимпиада, 1968 г. (Ленинград)

Класс	Задачи									
	Письменный тур					Устный тур				
8	94	95	96	97	98	105a	106	107	108	109
9	99	100	101	97	102	110	111	105a	108	109
10	103	95	104	97	96	1056	112	113	114	109

94. В восьмиугольнике все углы равны, а длины сторон – целые числа. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника равны между собой.

95. Какое из чисел больше: 31^{11} или 17^{14} ?

96. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?

97. Среди студентов, поступивших в Университет дружбы народов, ровно 50 человек знают английский язык, ровно 50 человек знают французский язык и ровно 50 человек знают испанский язык. Докажите, что студентов можно разбить на 5 (не обязательно равных) групп так, чтобы в каждой группе было ровно 10 человек, знающих английский язык, ровно 10 человек, знающих французский язык, и ровно 10 человек, знающих испанский язык. (Предполагается, что некоторые из студентов могут либо не знать ни одного из этих языков, либо знать любое количество из них.)

98. Докажите тождество:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \dots + \frac{20}{x^2-100} =$$

$$= 11 \left(\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \dots + \frac{1}{(x-10)(x+1)} \right).$$

99. В правильном n -угольнике ($n > 5$) разность между наибольшей и наименьшей диагоналями равна стороне. Найдите n .

100. Последовательность $a_1, a_2, a_3 \dots$ образована по следующему правилу:

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}, \dots, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Докажите, что $a_{100} > 14$.

101. Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка O , а внутри остроугольного треугольника $A'B'C'$ – точка O' . Из точки O опущены перпендикуляры: OA_1 – на сторону BC , OB_1 – на сторону CA и OC_1 – на сторону AB . Точно так же из точки O' опущены перпендикуляры $O'A'_1$ на $B'C'$, $O'B'_1$ на $C'A'$ и $O'C'_1$ на $A'B'$. Оказалось, что $OA_1 \parallel O'A'_1$, $OB_1 \parallel O'B'_1$, $OC_1 \parallel O'C'_1$ и $OA_1 \cdot O'A'_1 = OB_1 \cdot O'B'_1 = OC_1 \cdot O'C'_1$.

Докажите, что $O'A'_1 \parallel OA$, $O'B'_1 \parallel OB$, $O'C'_1 \parallel OC$ и $O'A'_1 \cdot OA = O'B'_1 \cdot OB = O'C'_1 \cdot OC$.

102*. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить как сумму не более n слагаемых, среди которых нет двух одинаковых, и каждое является делителем числа $n!$.

103. В треугольнике ABC взяли точку D на стороне AB и точку E на AC . При этом оказалось, что $DE \parallel BC$, $AD = DE = AC$, $BD = AE$.

Докажите, что длина BD равна длине стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = AC$.

104. На ребрах AB , AC , AD тетраэдра $ABCD$ построены, как на диаметрах, шары. Докажите, что эти шары покрывают тетраэдр.

105. а) В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «-», как показано на рисунке 6. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 6

б) На всех клетках шахматной доски 8×8 расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, где стоит минус. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали (в частности, в любой угловой клетке; диагональ – линия, по которой ходит шахмат-

ный слон). Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить доску с одними плюсами.

106. Медианы разбивают треугольник ABC на шесть треугольников. Оказалось, что четыре из окружностей, вписанных в эти треугольники, равны. Докажите, что треугольник ABC правильный.

107. Докажите, что уравнение

$$x^{2^p} + x + 1 = py$$

имеет решение в целых числах (x, y) для бесконечного числа простых p .

108. После выступлений 20 фигуристов каждый из 9 судей по своему усмотрению распределяет среди них места с 1-го по 20-е. Оказалось, что у каждого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитаем суммы мест, полученных каждым фигуристом, и расположим эти числа в порядке возрастания: $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_{20}$. Какое наибольшее значение может иметь c_1 ?

109*. Известно, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_n встречаются по разу числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$ и среди чисел b_1, b_2, \dots, b_n – тоже. Известно, кроме того, что $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq a_3 + b_3 \geq \dots \geq a_n + b_n$. Докажите, что $a_m + b_m \leq 4/m$ для всех m от 1 до n .

110. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашку весов каждую гирю, на которой написана его фамилия. Докажите, что можно впустить в класс таких учеников, чтобы в результате перевесила не та чашка весов, которая перевешивала вначале.

111. Город имеет в плане вид прямоугольника, разбитого на клетки: n улиц параллельны друг другу, m других пересекают их под прямым углом. На улицах города – но не на перекрестках – стоят милиционеры. Каждый милиционер сообщает номер проходящего мимо него автомобиля, направление его движения и время, когда он проехал. Какое наименьшее число милиционеров нужно расставить на улицах, чтобы по их показаниям можно было однозначно восстановить путь любого автомобиля, едущего по замкнутому маршруту (маршрут не проходит по одному и тому же участку улицы дважды)?

112. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке K . Докажите, что прямая, соединяющая

середину стороны AC с центром вписанной окружности, делит отрезок BK пополам.

113. Последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n удовлетворяет следующим условиям:

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, \dots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|.$$

Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$.

114. Дав выпуклый четырехугольник $ABCD$, длины всех сторон и диагоналей которого рациональны. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Докажите, что длина отрезка AO – рациональное число.

3-й Всесоюзная олимпиада, 1969 г. (Киев)

Класс	Задачи					
	1-й день			2-й день		
8	115	116	117	122	123	124a
9	118	119	115	124	125	126
10	119	120	121	125	126	128

115. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась такая точка E , что периметры треугольников ABE , BCE и CDE равны. Докажите, что $BC = AD/2$.

116. В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата – четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки – только по сторонам квадрата. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости волка. Докажите, что собаки имеют возможность не выпустить волка из квадрата.

117. Дана конечная последовательность нулей и единиц, обладающая двумя свойствами:

а) если в некотором произвольном месте последовательности выделить 5 цифр подряд и в любом другом месте тоже выделить 5 цифр подряд, то эти пятерки будут различны (эти пятерки могут перекрываться, например 0110101);

б) если к последовательности добавить справа любую цифру 0 или 1, то свойство а) перестает выполняться.

Докажите, что первая четверка цифр нашей последовательности совпадает с последней четверкой.

118. a , b , c и d – положительные числа. Докажите, что среди

неравенств

$$a + b < c + d,$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd,$$

$$(a + b)cd < ab(c + d)$$

есть хотя бы одно неверное.

119. Каково наименьшее натуральное число a , для которого найдется квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом a , имеющий два различных положительных корня, меньших единицы?

120. Дано натуральное число n . Выпишем все дроби вида $\frac{1}{pq}$, где p и q взаимно просты, $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$. Докажите, что сумма всех таких дробей равна $1/2$.

121*. В пространстве расположены n точек так, что любые три из них являются вершинами треугольника, один из углов которого больше 120° . Докажите, что эти точки можно обозначить буквами A_1, A_2, \dots, A_n таким образом, что каждый из углов $A_i A_j A_k$, где $1 \leq i < j < k \leq n$, будет больше 120° .

122. Четыре различных целых трехзначных числа, начинающихся с одной и той же цифры, обладают тем свойством, что их сумма делится на три из них без остатка. Найдите эти числа.

123. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки.

Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

124. Рассматривается выпуклый пятиугольник, у которого длины всех сторон равны.

а) Докажите, что внутри него найдется такая точка, лежащая на наибольшей диагонали, из которой все стороны видны под углами, не превышающими прямого.

б) Докажите, что круги, построенные на его сторонах как на диаметрах, не покрывают пятиугольник целиком.

125. На доске написано уравнение

$$x^3 + \dots + x^2 + \dots + x + \dots = 0.$$

Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля (положительное или отрицательное). Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место. Докажите, что первый может играть так, чтобы

независимо от хода второго все три корня получившегося уравнения оказались целыми числами.

126*. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

127. h_k – апофема правильного k -угольника, вписанного в круг радиуса R . Докажите, что

$$(n+1)h_{n+1} - nh_n > R.$$

128*. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n выполняется неравенство

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}.$$

4-я Всесоюзная олимпиада, 1970 г. (Симферополь)

Класс	Задачи								
	1-й день					2-й день			
8	129	130	131	132	133a				
9	134	135	133b	136	137				
10	138	139	133b	136	140	141	142	143	

129. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y , симметричные относительно диаметра AB , для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA .

130. Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

131. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

132. Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Докажите, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной.

133. а) Замок имеет форму (в плане) равностороннего треугольника со стороной 100 метров. Он разделен на 100 треугольных залов. Все стены залов имеют одинаковую длину – 10 метров. В середине каждой стены между залами сделана дверь. Докажите, что если человек захочет пройти по замку,

побывав в каждом зале не более одного раза, то он сможет осмотреть не более 91 зала.

б) Каждая сторона правильного треугольника разбита на k равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на k^2 маленьких треугольничков. Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в которой ни один треугольник не появляется дважды, а каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в «цепочке»?

134. Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

135. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD , медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Докажите, что угол BAC больше 45° .

136. Из цифр 1 и 2 составили пять n -значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите, что

$$\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}.$$

137*. Докажите, что из любых двухсот целых чисел можно выбрать сто чисел, сумма которых делится на сто.

138. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO , которая пересекает высоту AN в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

139. Докажите, что для каждого натурального числа k существует бесконечно много натуральных чисел t , не содержащих нулей в десятичной записи и таких, что t и kt имеют одинаковые суммы цифр.

140. Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Докажите, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

141. На карточках написаны все пятизначные числа от 11111 до 99999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Докажите, что получившееся 444445-значное число не может быть степенью двойки.

142*. Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую – с четной

суммой цифр. Докажите, что если $1 \leq k < n$, то сумма k -х степеней всех чисел первой группы равна сумме k -х степеней всех чисел второй группы.

143*. Вершины правильного n -угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

5-я Всесоюзная олимпиада, 1971 г. (Рига)

Класс	Задачи								
	1-й день					2-й день			
8	144	145a	146a	147		152a, 6	153	154	
9	144	145a	148	147	1466	156a, 6, в	152в	155	
10	149	1456	150	147	151	156	157	158	

144. Докажите, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n .

145. а) Дан треугольник $A_1A_2A_3$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2 , на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 , на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке O . Докажите,

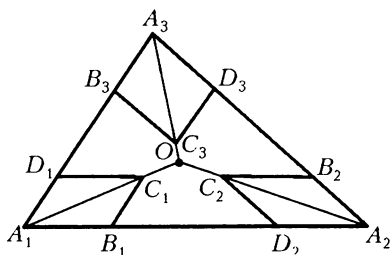


Рис. 7

что если $A_1B_1 = A_2D_2$ и $A_2B_2 = A_3D_3$, то $A_3B_3 = A_1D_1$ (рис.7).

б) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2 , на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 , ..., на стороне A_nA_1 — точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 , ..., A_nC_n пересекутся в одной точке O . Докажите, что равны произведения длин

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 \cdot \dots \cdot A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \dots \cdot A_nD_n.$$

146. а) Двое играют в такую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось следующее правило: если число b записано под числом a , а число d — под числом c , то $a + d = b + c$. Второй игрок, зная это правило,

хочет определить все написанные числа. Ему разрешается задавать первому игроку вопросы типа «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т.п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа?

б) В таблице $m \times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не меньше чем $m + n - 1$ чисел.

147*. В квадрате со стороной 1 расположено несколько кругов, диаметр каждого из которых меньше 0,001. Расстояние между любыми двумя точками любых двух кругов не равно 0,001. Докажите, что общая площадь, покрытая кругами, не превышает 0,34.

148*. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Докажите, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю имеющуюся воду.)

149. Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство $(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0$, то квадратные трехчлены $x^2 + p_1 x + q_1$ и $x^2 + p_2 x + q_2$ имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого,

150. Проекция тела на две плоскости — круги. Докажите, что эти круги имеют равные радиусы.

151. По кругу вписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a - d)(b - c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

152. а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

в) Докажите, что все прямые, делящие одновременно и площадь, и периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.

153. Докажите, что из 25 различных положительных чисел можно выбрать два таких числа, что ни одно из оставшихся не равно ни сумме, ни разности (между большим и меньшим) выбранных чисел.

154. а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2 \dots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных – плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах – плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знак в трех последовательных вершинах многоугольника.

155*. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

- 1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах,
- 2) в любом вырезанном квадрате площадь черных клеток составит не менее $1/5$ и не более $4/5$ площади этого квадрата.

Условиям задач 156–158, предлагавшийся на второй день олимпиады ученикам 10 класса, был предпослан такой текст:

«Вам предлагаются три задачи. Верное решение любой из них представляет серьезные трудности и требует много времени. Выберите одну из этих задач и постарайтесь продвинуться в ней как можно дальше.

Перед окончанием работы составьте «сводку результатов» по этой задаче, которую вы решали: перечислите доказанные вами факты, укажите примеры, в которых вам удалось разобраться, сформулируйте гипотезы, которые вам кажутся верными.»

156. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

а) Укажите ответ для маленьких значений n для $n = 2, 3, 4$.

б*) Попробуйте найти ответ при $n = 10$.

в*) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г*) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так.

Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3) , где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений $1, 2, \dots, n$. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличается от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти ответ для более общей задачи, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех или большего числа букв.

157. а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Докажите, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n) , что

$$f(x - m, y - n) = (x - m)^2 + (x - m)(y - n) + (y - n)^2 \leq 1/2.$$

б*) Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x - m, y - n)$ при всех целых m и n . Утверждение задачи а) состояло в том, что для всех x, y выполнено неравенство $\bar{f}(x, y) \leq 1/2$.

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\bar{f}(x, y) \leq 1/3$. Найдите все точки, для которых достигается равенство $\bar{f}(x, y) = 1/3$.

в*) Рассмотрим функцию $f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2$ ($0 \leq a \leq 2$). Найдите какое-либо число c , зависящее от a так, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство $|\bar{f}_a(x, y)| \leq c$. Постарайтесь найти точную оценку.

158. Переключатель (рис.8,а) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях.

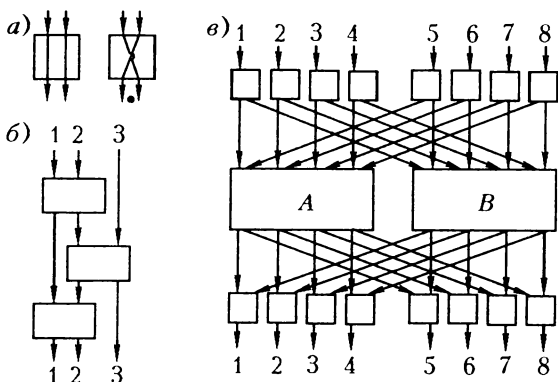
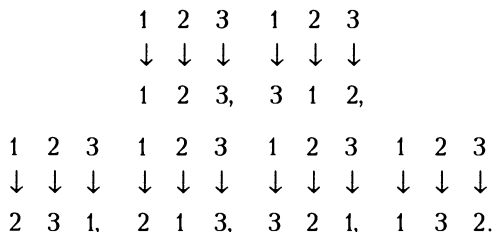


Рис. 8

На рисунке 8,б изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает таким свойством «универсальности»: меняя со стояния переключателей, можно осуществить любое из шести соединений трех входов с тремя различными выходами, т.е.



(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схемы равно $2^3 = 8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», т. е. осуществляла бы любое из 24 возможных соединений выходов и входов.

б) Какое минимальное число переключателей нужно для такой схемы?

в*) Назовем схему с n входами и n выходами n -универсальной, если она осуществляет любое из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами.

На рисунке 8,в изображена схема с восемью входами и восемью выходами, где A и B – 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной.

Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n -универсальной схеме.

6-я Всесоюзная олимпиада, 1972 г. (Челябинск)

Класс	Задачи						
	1-й день				2-й день		
8	159	160	161		166	167	168
9	162a	163	161	164	169	170	171
10	162г	163	165	164	166	172	173

159. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны AD , N – середина стороны BC . На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P . Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q . Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$.

160. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

- а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;
- б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

161. Найдите наибольшее целое число x такое, чтобы число

$$4^{27} + 4^{1000} + 4^x$$

являлось полным квадратом.

162. а) Пусть a, m, n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n .

б) Пусть a, b, m, n – натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n .

163. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число a , а далее под

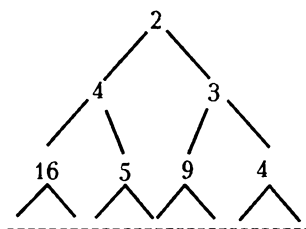


Рис. 9

каждым числом k слева пишется k^2 , а справа – число $k + 1$. Например, при $a = 2$ получается таблица, изображенная на рисунке 9. Докажите, что в каждой строчке такой таблицы все числа различны.

164*. Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Докажите, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2.

165. O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников AOB и COD , перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот треугольников BOC и AOD .

166. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

167. Семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри семиугольника, то сумма углов при вершинах A_1, A_3 и A_5 меньше 450° .

168*. Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее по своему усмотрению вместо одной из

звездочек в следующей разности:

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - * * * * \\ \hline \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй – чтобы она стала как можно меньше. Докажите, что:

а) второй может расставлять числа так, чтобы получившаяся при этом разность стала бы не больше 4000 независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000 независимо от того, куда расставляет эти цифры второй.

169. Пусть x, y – положительные числа, s – наименьшее из чисел $x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. Найдите наибольшее возможное значение s .

При каких x и y оно достигается?

170. Точка O , лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждым двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Докажите, что эта точка равноудалена от вершин многоугольника.

171. Можно ли расставить цифры 0, 1, 2. в клетках листа клетчатой бумаги размером 100×100 клеток таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике 3×4 клетки оказалось три нуля, четыре единицы и пять двоек?

172. Сумма положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n равна 1. Пусть s – наибольшее из чисел

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n}.$$

Найдите наименьшее возможное значение s . При каких значениях x_1, x_2, \dots, x_n оно достигается?

173*. Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из этой же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Докажите, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение – 0 очков, ничья – 1 очко, выигрыш – 2 очка.)

7-я Всесоюзная олимпиада, 1973 г. (Кишинев)

Класс	Задачи						
	1-й день			2-й день			
8	174а	175	176	182	183	184	
9	174б	177	178	179	185	186	184
10	180	177	181	187	188	184	

174. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю – фальшивые, а с 8-й по 14-ю – настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта – чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по 7-ю – фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания?

б) Покажите, что с помощью трех взвешиваний он может доказать даже больше: что монеты с 1-й по 7-ю – фальшивые, а с 8-й по 14-ю – настоящие.

175. Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть полным квадратом целого числа.

176. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

177. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B . Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C . Отрезок OC пересекает окружность в точке E , а прямые AE и OB пересекаются в точке K . Докажите, что $OK = KB$.

178. Действительные числа a, b, c таковы, что для всех чисел x , удовлетворяющих условию $-1 \leq x \leq 1$, выполнено неравенство

$$|ax^2 + bx + c| \leq 1.$$

Докажите, что при этих значениях x выполнено также неравенство

$$|cx^2 + bx + c| \leq 2.$$

179. Теннисная федерация присвоила всем входящим в нее теннисистам квалификационные номера: сильнейшему – первый номер, следующему по силе – второй и т.д. Известно, что во встречах теннисистов, квалификационные номера которых различаются более, чем на 2, всегда побеждает спортсмен с меньшим номером. Турнир, в котором участвуют 1024 сильнейших теннисиста, проводится по олимпийской системе: участники очередного тура разбиваются по жребию на пары и в следующий тур выходит победитель в каждой паре, так что число участников после каждого тура уменьшается вдвое. Таким образом, после десятого тура будет выявлен победитель. Какой наибольший номер может он иметь?

180. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней.

181. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2$, происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу. Каждая клетка K приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки K и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то K становится белой, если две или три из них были черными – то черной). а) Докажите, что через конечное время на листе не останется черных клеток. б) Докажите, что черные клетки исчезнут не позже чем в момент времени $t = n$.

182. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены три подобных между собой остроугольных треугольника AC_1B , BA_1C , CB_1A (при этом $\angle AB_1C = \angle ABC_1 = \angle A_1BC$; $\angle BA_1C = \angle BAC_1 = \angle B_1AC$).

а) Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AC_1B , BA_1C и CB_1A , пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 .

183. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N .

184. Король обошел шахматную доску 8×8 , побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле (король ходит по обычным правилам). Когда нарисовали его путь, соединив отрезками центры полей, которые

он последовательно проходил, то получилась замкнутая ломаная без самопересечений.

а) Приведите пример, показывающий, что король мог сделать ровно 28 ходов по горизонтали и вертикали.

б) Докажите, что он не мог сделать меньше, чем 28 таких ходов.

в) Какую наибольшую и какую наименьшую длину может иметь путь короля, если длина стороны клетки равна 1?

185. Дан треугольник с площадью 1 и сторонами a, b, c . Известно, что $a \geq b \geq c$. Докажите, что $b \geq \sqrt{2}$.

186. Дан выпуклый n -угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Докажите, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n -угольника пополам.

187. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

188. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

8-я Всесоюзная олимпиада, 1974 г. (Ереван)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	189а,б,в	190	191	197	198	199	200а	
9	190	192	189г	193	201	202	200б	
10	194	195	196	193	203	204	200б	

189. На карточках написаны числа, каждое из которых равно «+1» или «-1». Разрешается, указав три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел на этих карточках?» (сами числа нам не сообщают). Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел на всех карточках, если число карточек равно: а) 30; б) 31; в) 32? В каждом случае докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

г) По окружности написано 50 чисел, каждое из которых равно «+1» или «-1». Требуется узнать произведение всех этих чисел. За один вопрос можно узнать произведение трех стоящих подряд чисел. Какое наименьшее число вопросов необходимо задать?

190. Среди чисел вида $36^k - 5^l$, где k и l – натуральные числа, найдите наименьшее по абсолютной величине. Докажите, что найденное число действительно наименьшее.

191. а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD , BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1?

192. Даны две окружности радиусов R и r , касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB .

193*. На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 2.

194. При каких действительных a, b, c равенство

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

верно для всех действительных x, y, z ?

195. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC , причем $BP = BQ$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC . Докажите, что угол DHQ прямой.

196. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Особые точки разрешается перекрашивать: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

197. Найдите все натуральные числа n и k такие, что n^n имеет k цифр, а k^k имеет n цифр.

198. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE , пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и L . Докажите, что $KL = LB$.

199. На шахматной доске 8×8 двое играют в игру «кошки-мышки». У первого одна фишка – мышка, у второго несколько

фишек – кошек. Все фишки ходят одинаково: вправо, влево, вверх или вниз на одну клетку. Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она прыгает с доски. Если кошка и мышка попадают на одну и ту же клетку, то кошка съедает мышку.

Играющие ходят по очереди, причем второй передвигает своим ходом всех своих кошек сразу (разных кошек можно при этом сдвигать в разных направлениях). Начинает мышка. Она старается прыгнуть с доски, а кошки стараются до этого ее съесть.

а) Пусть кошек всего две. Мышка уже поставлена на какую-то клетку не на краю. Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?

б) Пусть кошек три, но зато мышка имеет лишний ход: в первый раз она делает два хода подряд. Докажите, что мышка сможет убежать от кошек, каково бы ни было начальное расположение фишек.

200. а) Докажите, что числа $1, 2, 3, \dots, 32$ можно расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними.

б) Можно ли числа $1, 2, 3, \dots, 100$ расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

201. Найдите все трехзначные числа A , обладающие следующим свойством: среднее арифметическое всех чисел, получающихся из числа A различными перестановками его цифр, равно A .

202. Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить никакой треугольник площади 1. Докажите, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

203. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ задана функция f . Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1) = 1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и $x_1 + x_2 \leq 1$, выполнено неравенство

$$f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2).$$

а) Докажите, что какова бы ни была функция f , удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x) \leq 2x$.

б) Верно ли, что для всех x

$$f(x) \leq 1,9x?$$

204. Дан треугольник ABC площади 1, Пусть A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC , CA и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM , если точки K , L и M лежат соответственно на отрезках AB_1 , CA_1 и BC_1 ?

9-я Всесоюзная олимпиада, 1976 г. (Саратов)

Класс	Задачи						
	1-й день				2-й день		
8	205а	206	207	208а	213	214	215
9	209	206	210	208б	216	215	217
10	211	212	205б	208	214	218	219

205. а) Из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180° , получили треугольник $A_1B_1C_1$. Соответствующие друг другу при повороте отрезки AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2 , BC и B_1C_1 – в точке A_2 , CA и C_1A_1 – в точке B_2 . Докажите, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны.

б) Из четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, поворотом вокруг центра на некоторый угол, меньший 180° , получили четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки пересечения соответствующих друг другу при повороте прямых: AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CD и C_1D_1 , DA и D_1A_1 , служат вершинами параллелограмма.

206. Дан треугольник ABC площади 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB , второй – Y на стороне BC , затем первый – Z на стороне AC . Цель первого – получить треугольник XYZ наибольшей площади, второго – наименьшей. Какую наибольшую площадь может обеспечить себе первый?

207. Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32-угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

208*. а) В квадрате 7×7 клеток нужно отметить центры k клеток так, чтобы никакие четыре отмеченные точки не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

б) Решите аналогичную задачу для квадрата 13×13 клеток.

209. В выпуклом шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ середины диагоналей A_6A_2 , A_1A_3 , A_2A_4 , A_3A_5 , A_4A_6 , A_5A_1 обозначим соответственно через B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 , B_6 . Докажите, что

если шестиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ выпуклый, то его площадь в четыре раза меньше площади $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

210. Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n -значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах.

211. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что некоторая прямая пересекает все эти многоугольники.

212. Докажите, что для положительных a, b, c имеет место неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c).$$

213. Три мухи ползют по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образуемого ими треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника ABC , если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центр тяжести треугольника – точка пересечения его медиан.)

214. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вписать вместо них цифру, отличную от стертых (вместо 0 и 1 – цифру 2, вместо 1 и 2 – 0, вместо 0 и 2 – 1). Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одно число, то оно не зависит от порядка, в котором производились стирания.

215. Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой – параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих прямых пересекаются внутри полосы и

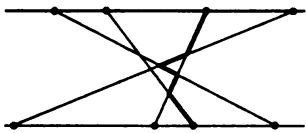


Рис. 10

никакие три из них не имеют общей точки. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке полосы, обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны переходить на другую прямую (рис.10). Докажите, что среди таких путей

а) есть не менее $n/2$ путей без общих точек;
б) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;
в*) есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2} + 1$ прямым;

г*) есть путь, проходящий по всем n прямым.¹

¹ В восьмом классе предлагались вопросы а), б) и г), причем для $n = 20$; в 9 классе вопросы б), в) и г) для общего случая n прямых.

216. Для каких натуральных k можно составить куб размера $k \times k \times k$ из белых и черных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы для любого кубика ровно два из его соседей имели тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.)

217. Дан многочлен $P(x)$ с

- а) натуральными коэффициентами;
- б) целыми коэффициентами.

Обозначим через a_n сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ бесконечно много раз.

218. В чемпионате мира и Европы участвуют 20 команд. Среди них имеется k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг.

При каком наибольшем k может оказаться, что команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это:

- а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи);
- б) чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)?

219. а) Даны вещественные числа a_1, a_2, b_1, b_2 и положительные числа p_1, p_2, q_1, q_2 . Докажите, что в следующей таблице 2×2

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{p_1 + a_1} & \frac{a_1 + b_2}{p_1 + q_2} \\ \frac{a_2 + b_1}{p_2 + q_1} & \frac{a_2 + b_2}{p_2 + q_2} \end{pmatrix}$$

найдется число, которое не меньше числа, стоящего с ним в одной строке, и не больше числа, стоящего с ним в одном столбце.

б*) Даны вещественные числа a_1, a_2, \dots, a_m , b_1, b_2, \dots, b_n и положительные числа p_1, p_2, \dots, p_m , q_1, q_2, \dots, q_n . Составлена таблица $m \times n$, в которой на пересечении i -й строки ($i = 1, 2, \dots, m$) и j -го столбца ($j = 1, 2, \dots, n$), стоит число

$$\frac{a_i + b_j}{p_i + q_j}.$$

Докажите, что в этой таблице найдется число, которое не меньше любого числа, стоящего с ним в одной строке, и не больше любого числа, стоящего с ним в одном столбце.

1. Предположим, что нам удалось провести ломаную, удовлетворяющую условию. Поскольку контуры заштрихованных на рисунке 1 областей 1, 2, 3 содержат по пять

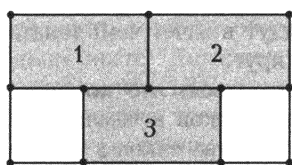


Рис. 1

отрезков и ломаная должна каждый из этих отрезков пересечь ровно по одному разу, каждая из этих трех областей должна содержать один из концов ломаной (если ни один из концов не принадлежит области, ломаная должна входить в нее столько же раз, сколько и выходить, т.е. число ее пересечений с отрезками границы должно быть четным). Однако концов у ломаной только два. Получено противоречие, доказывающее утверждение задачи.

▽ То же решение можно изложить иначе. Поставим в каждой из 6 областей, на которые наша фигура делит плоскость,

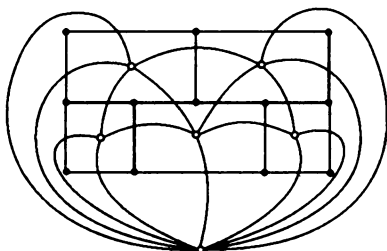


Рис. 2

точку — «столицу» области и для каждого из 16 отрезков нарисуем пересекающую его «дорогу», соединяющую столицы двух прилежащих к нему областей (рис.2). Полученную сеть дорог нельзя обойти, проходя по каждой дороге один раз, поскольку имеется 4 столицы, в которых сходится нечетное число дорог. А чтобы такой обход существовал, необходимо (и, как можно показать, достаточно), чтобы таких «нечетных столиц» было 0 и 2.

2. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник и LN — общая касательная окружностей 1 и 3 с центрами в точках A и C . 1-й точки O — центра прямоугольника — опустим перпендикуляр OM на прямую LN . Четырехугольник $ALNC$ — трапеция, а OM — ее средняя линия, так что $OM = (r_1 + r_3)/2$. Расстояние от точки O

до второй общей касательной тех же окружностей тоже равно $(r_1 + r_3)/2$.

Точно так же устанавливается, что расстояние от точки O до общих касательных двух оставшихся окружностей равно $(r_2 + r_4)/2$. Поскольку по условию $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$, точка O одинаково удалена от всех четырех касательных, т.е. является центром круга, вписанного в образованный ими четырехугольник.

3. Среди первых двадцати из данных чисел найдутся два, у которых последняя цифра десятичной записи равна нулю.

Хотя бы у одного из этих двух чисел перед нулем стоит цифра, не равная 9. Пусть N – это число, s – сумма его цифр.

Тогда числа $N, N+1, \dots, N+9, N+10$ содержатся среди данных 39 и имеют суммы цифр $s, s+1, s+2, \dots, s+10$. Но среди одиннадцати последовательных чисел хотя бы одно делится на 11.

∇ Вообще, для каждого $m = 2, 3, \dots$ можно найти наименьшее c_m такое, чтобы среди любых c_m последовательных натуральных чисел хотя бы у одного сумма цифр делилась на m (для $m < 20$ достаточно изучить поведение функции «сумма цифр числа n » в пределах одной сотни; график этой функции изображен на рисунке 3); в частности, $c_2 = 3, c_3 = 5, \dots, c_{10} = 19, c_{11} = 39, c_{12} = 59, \dots$

4. Ясно, что расположение семи звездочек, показанное на рисунке 4, удовлетворяет условию задачи.

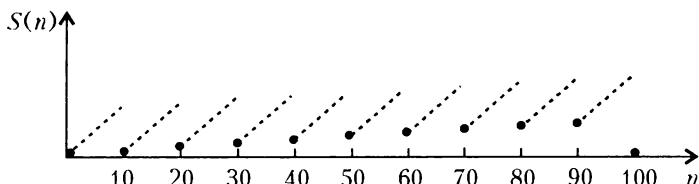


Рис. 3

Если же звездочек шесть или меньше, то найдутся два столбца, в каждом из которых стоит не более одной звездочки. Вычеркнем оставшиеся два столбца. После этого останется не больше двух звездочек, которые можно вычеркнуть вместе со строками, в которых они стоят.

∇ Было бы интересно исследовать общую аналогичную задачу: какое наи-

			*
*	*		
*		*	
	*	*	

Рис. 4

меньшее число звездочек можно расставить в таблице $m \times n$, чтобы при вычеркивании любых k столбцов и l строк оставалась хотя бы одна звездочка. (Здесь k, l, m, n – натуральные числа, $k < m, l < n$.) Но даже для $m = n, k = l = n - 2$ она очень трудна (см. задачу 208, где $n = 7$ и $n = 13$).

5. а) Предположим, что четверка (a, b, c, d) встретилась вновь.

Докажем сначала, что в этом случае $abcd = 1$.

Пусть $abcd = p$. Тогда произведение чисел второй четверки равно p^2 , третьей – p^4 , четвертой – p^8 , ... Ясно, что при $p \neq 1$ в последовательности произведений не будет двух одинаковых чисел и, следовательно, все получающиеся четверки будут различны. Таким образом, $p = 1$.

Теперь рассмотрим вторую четверку: ab, bc, cd, da ; так как $abcd = 1$, то, как легко проверить, четвертой четверкой будет $b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2$. Таким образом, четвертая четверка получается из второй возведением в квадрат и перестановкой. Точно так же из четвертой получается шестая четверка, из шестой – восьмая и т.д.

Если среди чисел второй четверки не все равны единице, то наибольшее из них больше единицы. Тогда наибольшее из чисел $2n$ -й четверки будет с ростом n неограниченно увеличиваться, а это противоречит тому, что они периодически повторяются.

Итак, $ab = bc = cd = da = 1$, а отсюда уже легко получить, что $a = b = c = d = 1$.

б) При $n = 1$ утверждение задачи, очевидно, справедливо.

Предположим, что оно справедливо при $n = k$, и докажем его справедливость при $n = k + 1$.

Запишем первые три строчки:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2^{k+1}},$$

$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{2^{k+1}}x_1,$$

$$x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \dots, x_{2^{k+1}}x_2.$$

Легко видеть, что числа, стоящие на нечетных местах, и числа, стоящие на четных местах, образуют строчки, $x_1, x_3, \dots, x_{2^{k+1}-1}$ и $x_2, x_4, \dots, x_{2^{k+1}}$, которые «через шаг» преобразуются так, как это требуется в условии, а так как по предположению индукции строчка длины 2^k в конце концов преобразуется в строчку из одних единиц, то и из исходной строчки длины 2^{k+1} получится строчка из одних единиц.

∇ Можно доказать, что из строки x длины $m = 2^k r$, где r

нечетно, тогда и только тогда получится строка из одних единиц, когда x состоит из r одинаковых блоков длины 2^k , т.е. имеет период 2^k (см. [5], задача 134).

6. а) Пусть $\overrightarrow{O_1O_3}$ – вектор, полученный поворотом $\overrightarrow{O_1O_2}$ на 60° (в ту же сторону, что и поворот, переводящий \overline{AB} в \overline{AC}), точки A' и B' – образы A и B при том же повороте вокруг O_1 . При равномерном вращении векторов $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2B}$ с той же угловой скоростью будут вращаться: $\triangle O_1A'A$ – вокруг O_1 , векторы $\overrightarrow{O_3B'}$ и $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{A'A}$, а значит и их сумма $\overrightarrow{O_3C}$ – вокруг O_3 (рис.5).

б) **Ответ:** 5. Зафиксируем точку B на расстоянии 3 от P (рис.6). При вращении точки A по окруж-

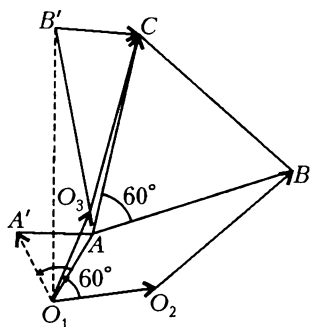


Рис. 5

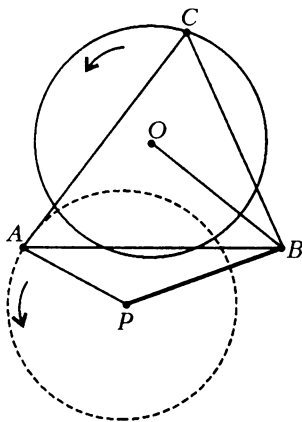


Рис. 6

ности радиуса 2 с центром P вершина C будет двигаться по окружности радиуса 2, центр которой O расположен на расстоянии $OP = 3$ от P ($\triangle OPB$ – равносторонний). Самая далекая точка этой окружности находится от P на расстоянии $CO + OP = 5$.

∇ В доказываемом аналогично неравенстве $PC \leq AP + BP$ (для любого равностороннего треугольника ABC и любой точки P) равенство достигается для всех точек P дуги AB описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей точку C .

7. Среди всех таблиц, которые можно получить из данной переменными знаков в строках и столбцах, возьмем ту, для которой сумма \sum максимальна. Такая таблица T существует, поскольку всех способов расстановки знаков перед числами таблицы $m \times n$ конечное число – 2^{mn} (способов, которыми можно осуществить перемены знаков в строках и столбцах, еще меньше: 2^{m+n-1}). В таблице T сумма чисел в каждой строке и в

каждом столбце неотрицательна. В самом деле, если бы сумма чисел в некоторой строке (или столбце) таблицы Т была отрицательна, то, изменив знак в этой строке (столбце), мы получили бы таблицу с большей суммой \sum всех чисел, что противоречит выбору таблицы Т.

8. Назовем одну из n точек «корнем». Поставим в соответствие каждой из остальных $n - 1$ вершин последний отрезок (единственного по условию) пути, ведущего в эту точку из «корня». Это соответствие между множеством из $n - 1$ вершин и множеством всех отрезков будет взаимно однозначным.

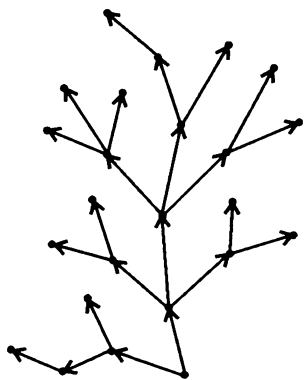


Рис. 7

Чтобы сделать это совсем очевидным, удобно расставить на всех отрезках стрелки, ведущие от корня (рис.7); тогда в каждую точку, кроме вершины, ведет одна стрелка.

Граф, который рассматривается в этой задаче, называется *деревом* (П11); мы превратили дерево, выделив в нем одну точку, в корневое ориентированное дерево. Задачу можно решить также методом математической индукции (П1).

9. Пусть наибольший общий делитель чисел b и $p - a$ равен d , $b = kd$ и $p - a = ld$. Тогда числа k и l взаимно просты. Далее, $ak + bl = ab/d + (p - a)b/d = pk$. Итак, $ak + bl$ делится на p .

10. **Ответ:** самый выгодный для Коли способ — первый; при втором и третьем он получит, при правильной игре, на орех меньше. (Вообще, как мы увидим, спор в этом дележе идет из-за одного ореха.)

Какие бы кучи (из a и b орехов, $a < b$) ни образовались после первого хода Пети, Коля может большую из них разбить на две части по 1 и $b - 1$ орехов, которые окажутся наибольшей и наименьшей, т.е. при первом способе дележа забрать $b \geq n + 1$ орехов. (Взяв $a = n$, $b = n + 1$, Петя помешает ему добиться большего.) При *втором* способе дележа после первого хода $a = 2$, $b = 2n + 1$ и наилучшем ответе $2 = 1 + 1$, $2n - 1 = n - 1 + n$ Коле достанется лишь n орехов. (Но при любом другом первом ходе он может получить не меньше $n + 1$.) При *третьем* способе ход Пети $a = n$, $b = n + 1$ не позволяет Коле добиться большего, чем забрать себе $n + 1$ орех (суммы двух средних кучек и двух крайних всегда будут как раз n и $n + 1$), так что лишний орех, который нужно отдать, оказывается решающим.

11. Так как числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – натуральные, то существует такая последовательность номеров $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, что $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n} \leq \dots$ (a_{i_1} – наименьшее число последовательности a_n, a_{i_2} – наименьшее из следующих и т.д.). Аналогично из последовательности номеров $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$ можно выбрать последовательность $j_1, j_2, \dots, j_n, \dots$, для которой

$$b_{j_1} \leq b_{j_2} \leq \dots \leq b_{j_n} \leq \dots$$

Ясно при этом, что последовательность $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}, \dots$ остается неубывающей. Теперь осталось из последовательности $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_n}, \dots$ выбрать неубывающую последовательность $c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_n}, \dots$. Тогда

$$a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots \leq a_{k_n} \leq \dots,$$

$$b_{k_1} \leq b_{k_2} \leq \dots \leq b_{k_n} \leq \dots,$$

$$c_{k_1} \leq c_{k_2} \leq \dots \leq c_{k_n} \leq \dots,$$

откуда следует утверждение задачи.

▽ В решении мы пользовались тем, что в любом (даже бесконечном) множестве натуральных чисел есть наименьшее число. Этот факт представляется очевидным; он эквивалентен принципу математической индукции (П1).

12. Центр круга диаметра 1, целиком помещающегося внутри прямоугольника, должен быть расположен на расстоянии, большем $1/2$, от любой из сторон прямоугольника, т.е. внутри «рамки», изображенной на рисунке 8, а. Площадь внутреннего прямоугольника равна $19 \cdot 24 = 456$.

Кроме того, центр круга должен быть расположен на расстоянии, большем $1/2$, от контура любого из квадратов, т.е. вне каждой фигурки площади

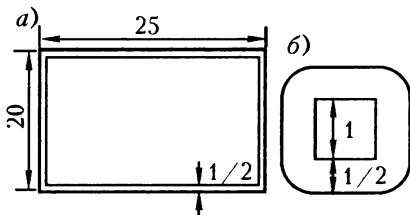


Рис. 8

$3 + \frac{\pi}{4}$ изображенной на рисунке 8, б. Даже если эти фигурки не пересекаются и не задевают рамку, их суммарная площадь равна

$$120 \left(3 + \frac{\pi}{4} \right) = 360 + 30\pi < 360 + 30 \times 3,2 = 456.$$

Таким образом, этими фигурами покрыть прямоугольник площади 456 нельзя и, следовательно, найдется круг диаметра 1, не

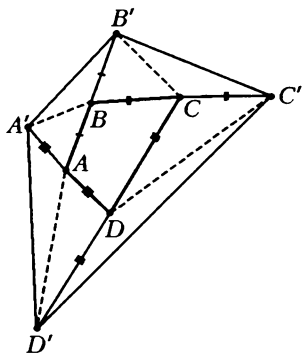


Рис. 9

пересекающийся ни с одним из квадратов.

13. Медиана делит площадь треугольника пополам. Поэтому (рис.9) $S_{ABC} = S_{CBB'} = S_{CB'C'}$. Отсюда следует, что $S_{BB'C'} = 2S_{ABC}$.

Точно так же доказываются равенства

$$S_{CC'D'} = 2S_{BCD};$$

$$S_{DD'A} = 2S_{CDA};$$

$$S_{AA'B'} = 2S_{DAB}.$$

Сложив эти 4 равенства, получим:

$$S_{BB'C'} + S_{CC'D'} + S_{DD'A} + S_{AA'B'} = 2(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) = 4S.$$

Поэтому $S_{A'B'C'D'} = 4S + S = 5S$.

14. Ответ: искомое множество точек M касания — пара прямых, касающихся окружности s в точках P, Q ее пересечения с прямой l (за исключением самих точек P и Q).

Пусть общая касательная s и s' касается окружности s в точке N . Тогда $\angle NOM = \angle OMO_1 = \angle MOO_1$ ($ON \parallel O_1M$ и $OO_1 = O_1M$). Поэтому $\angle MQO$ прямой и прямая MQ касается s в точке Q (рис.10).

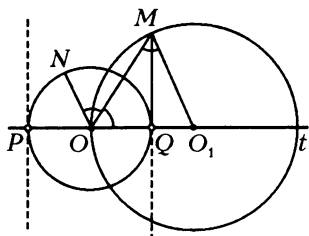


Рис. 10

С другой стороны, через любую точку указанных в ответе прямых, не лежащую на s , можно провести окружность с центром на прямой l , проходящую через точку O .

15. По условию $a_1 - a_0 \geq 1$. Далее, $a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0)$, $a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$, ..., $a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$. Перемножив эти 99 равенств, обе части которых положительны, и сократив общие множители $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{99} - a_{98}$ в обеих частях, получим

$$a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a_0) \geq 2^{99}.$$

∇ Более точная оценка по индукции $a_k \geq 2^k$, $a_{k+1} - a_k \geq 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$) показывает, что $a_{100} \geq 2^{100}$.

16. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Разность

$$P(62) - P(19) = a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19)$$

делится на 43 и не может равняться 1.

∇ Вообще, для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами разность $P(x_1) - P(x_2)$, где x_1 и x_2 – различные целые числа, делится на $x_1 - x_2$ (П6).

17. Пусть p_1, p_2, \dots, p_n – произведения по строкам, q_1, q_2, \dots, q_n – по столбцам. Тогда $p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_n$ – мы двумя способами вычисляем произведение всех чисел в таблице. Значит, четность количества -1 среди p_1, p_2, \dots, p_n та же, что и среди q_1, q_2, \dots, q_n , т.е. всего среди $2n$ чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ четное число -1 и тем самым четное число $+1$. Но тогда число тех и других различно (так как n нечетно) и потому сумма $p_1 + p_2 + \dots + p_n + q_1 + q_2 + \dots + q_n$ не равна 0.

∇ Эта сумма может отличаться от $2n$ лишь на число d , кратное 4. Интересно, построив соответствующие примеры, выяснить, для любого ли $d = 4k, |k| < n/2$, сумма может равняться $2n - d$.

18. Пусть нам известны длины a, b сторон BC и AC треугольника и мы хотим, чтобы его медианы AD и BE пересекались под прямым углом. Возьмем на отрезке AC длины b точку F так, что $AF : FC = 3$; тогда $FD \parallel BE$ и $\angle ADF$ должен быть равен 90° , т.е. точка D должна лежать на окружности с диаметром AF и, кроме того, на окружности радиуса $a/2$ с центром C . Отсюда ясно, как построить точку D , а затем и B . Задача имеет решение, если $1/2 < b/a < 2$, и при этом искомым треугольник единствен.

∇ Можно доказать, что в таком треугольнике квадрат третьей стороны c равен $c^2 = (a^2 + b^2)/5$, и получить отсюда другое решение.

19. Из неравенства $x^2 + y^2 \geq 2xy$ следует, что

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2(ab + cd) \geq 4\sqrt{abcd} \geq 4,$$

$$ab + cd \geq 2, \quad bc + ad \geq 2, \quad ac + bd \geq 2.$$

∇ Пользуясь общей теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом, можно решить задачу другим способом, а также доказать, что для любых n положительных чисел s произведением 1 сумма их квадратов не меньше n , а сумма $n(n-1)/2$ их попарных произведений не меньше $n(n-1)/2$.

20. Ответ: r_3 – наибольшее для вершин пятиугольника, и наименьшее – для середин сторон. Разобьем правильный пятиугольник $ABCDE$ его осями симметрии на 10 треугольников. Достаточно исследовать точки M внутри и на границе одного из них, например AOK (рис.11). Чтобы сравнить расстояния от точки M внутри некоторого угла до его сторон, достаточно

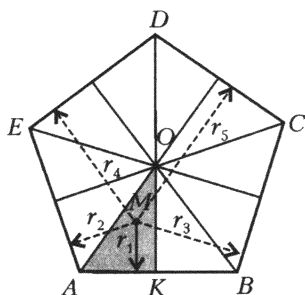


Рис. 11

выяснить, по какую сторону от биссектрисы этого угла лежит точка M . Пользуясь этим, убеждаемся, что расстояния от точки M до сторон пятиугольника AB, AE, BC, DE, CD всегда идут в порядке возрастания:

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_5.$$

Третье по величине расстояние r^3 будет наибольшим, когда M совпадает с A , и наименьшим, когда M совпадает с K .

21. Ответ. $c = 9$. Сумма цифр любого числа дает при делении на 9 тот же остаток, что само число (ПЗ). С другой стороны, $a \leq 1962 \cdot 9 < 19999$, поэтому $b \leq 1 + 4 \cdot 9 = 37$ и $c \leq 9$.

22. Опустим высоту AD в $\triangle ADC$ (рис.12). Тогда в $\triangle ADC$ отрезок MN будет средней линией, т.е. $DH = CH$. Прямоугольные треугольники BHM и ADC подобны, поскольку

$$\angle DAC = 90^\circ - \angle C = \angle HBM,$$

причем после поворота одного из них на 90° соответствующие стороны станут параллельными; при этом соответствующие медианы BP и AN также станут параллельными, а значит, до поворота было $AN \perp BP$.

23. Ответ: 1. Среди треугольников с двумя сторонами a, b , которые удовлетворяют условиям $0 < a \leq 1, 1 \leq b \leq 2$, наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с катетами $a = 1, b = 2$ (в

самом деле, $s \leq ab/2 \leq 1$, поскольку высота, опущенная на сторону b , не больше a). Третья его сторона $c = \sqrt{5}$ удовлетворяет условию $2 \leq c \leq 3$, следовательно, среди всех рассматриваемых треугольников он имеет наибольшую площадь.

24. Частное равно $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$. Чтобы проверить нужное тождество, удобно положить $x - y = u, y - z = v$, тогда $z - x = -(u + v)$, и доказать тождество

$$(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u + v)(u^2 + uv + v^2)$$

с помощью формулы бинорма Ньютона (П6):

$$(u + v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5.$$

25. Решить эту задачу помогает рисунок 13: ломаная с вершинами в точках (k, a_k) «выпукла», поскольку $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$ (т.е. угловой коэффициент каждого следующего звена больше, чем предыдущего), так что вся она, кроме концов, лежит ниже оси $0k$.

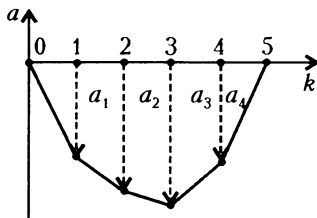


Рис. 13

Допустим, что при некотором $m \geq 1$ будет $a_{m+1} \leq 0$, $a_m > 0$. Тогда

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq \dots \geq a_{m+1} - a_m \geq a_m - a_{m-1} > 0$$

и поэтому $a_n > a_{n-1} > \dots > a_m > 0$, что противоречит условию $a_n = 0$.

26. Рассмотрим таблицу $m \times n$ и будем рассуждать по индукции, считая, что для таблиц с меньшей суммой $m + n$ утверждение уже доказано. Для таблицы 1×1 оно очевидно. Выберем наименьшее из $m + n$ данных чисел $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ — пусть это будет a_1 . Поставим a_1 в левый верхний угол, а затем первую строку отрезем; останется решить задачу для таблицы $(m-1) \times n$ и набора чисел $a_2, \dots, a_m, b_1 - a_1, b_2, \dots, b_n$, а это по предположению индукции мы делать умеем.

Другое, типично «олимпиадное» решение. Нарисуем отрезок длины $d = a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ и разобьем его двумя способами: на m «красных» отрезков длины a_1, a_2, \dots, a_m и n «синих» отрезков длины b_1, b_2, \dots, b_n . Всего будет $(n-1) + (m-1)$ точек разбиения и соответственно $m+n-1$ маленьких отрезков. Остается записать длину каждого из этих отрезков (пересечения некоторого красного a_i и некоторого синего b_j) в соответствующую клетку таблицы (стоящую на пересечении i -й строки и j -го столбца).

27. Пусть 1-я, 2-я, 4-я и 5-я окружности проходят через точку A ; 1-я, 3-я, 4-я и 5-я — через точку B ; 2-я, 3-я, 4-я и 5-я — через точку C .

Мы видим, что все три точки A, B и C не могут быть различными, так как они лежат на 4-й и 5-й окружностях, а две окружности имеют не больше двух точек пересечения. Значит, какие-то две из точек A, B и C совпадают (П9).

Пусть, например, $A = B$. Тогда все окружности проходят через точку A .

28. Ответ: шахматист, занявший третье место, выиграл у седьмого.

Шахматисты, занявшие последние четыре места, сыграли между собой 6 партий и поэтому набрали все вместе не меньше 6 очков уже в этих партиях. Следовательно, шахматист, занявший второе место, набрал не меньше 6 очков.

С другой стороны, он не мог набрать больше 6 очков: если победитель турнира набрал 7 очков, то второй ему проиграл и, значит, набрал не больше 6 очков; если же у первого 6,5 очков, то у второго также не больше 6 очков.

Отсюда следует, что второй набрал ровно 6 очков.

Последние четыре участника турнира также набрали 6 очков и, следовательно, проиграли все партии шахматистам, занявшим 1–4-е места.

29. а) Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Поскольку треугольники ABD и BCD имеют равные площади и общее основание BD , их высоты, опущенные из вершин A и C , равны, т.е. точки A и C одинаково удалены от BD , отсюда следует, что $AO = OC$. Точно так же доказывается, что $BO = OD$.

Итак, диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся их точкой пересечения пополам, а это значит, что $ABCD$ – параллелограмм.

б) Первое решение. Предположим, что у некоторого выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, делят площадь пополам и в то же время не пересекаются в одной точке. Тогда их точки пересечения P , Q и R являются вершинами треугольника, лежащего внутри шестиугольника (рис.14).

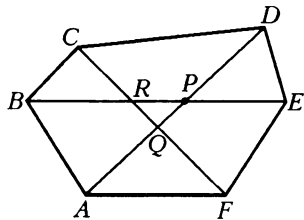


Рис. 14

Площади четырехугольников $ABCD$ и $BCDE$ равны, поэтому равны и площади треугольников ABP и EPD , так как

$$S_{ABP} = S_{ABCD} - S_{BCDP} = S_{BCDE} - S_{BCDP} = S_{EPD}.$$

Точно так же получим, что

$$S_{BCR} = S_{EFR} \text{ и } S_{AQF} = S_{CQD}.$$

Из равенства площадей треугольников получаются следующие соотношения:

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP, \quad CQ \cdot DQ = AQ \cdot FQ, \quad ER \cdot FR = BR \cdot CR.$$

Перемножив эти равенства, мы получим

$$AP \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot ER \cdot FR = AQ \cdot BR \cdot CR \cdot DP \cdot EP \cdot FQ.$$

Но это невозможно: ведь $AP > AQ$, $BP > BR$, $CQ > CR$, $DQ > DP$, $ER > EP$, $FR > FQ$, поэтому произведение справа меньше, чем слева. Полученное противоречие показывает, что диагонали AD , BE и CF пересекаются в одной точке (т.е. что $PQ = QR = RP = 0$).

Второе решение. Это решение основано на использовании геометрического преобразования – гомотетии. Поскольку площади четырехугольников $ABCD$ и $BCDE$ равны, то равны и площади треугольников ABD и BDE (они меньше площадей соответствующих четырехугольников на S_{BCD}). Эти треугольники имеют общее основание BD . Из равенства площадей вытекает равенство высот, опущенных на BD из вершин A и E , т.е. точки A и E одинаково удалены от BD . Поэтому $AE \parallel BD$. Точно так же устанавливается, что $CE \parallel BF$ и $DF \parallel AC$. Таким образом, треугольники BDF и ACE подобны.

Пусть P – точка пересечения диагоналей AD и BE . Рассмотрим гомотетию с центром в точке P и коэффициентом $PE : PB$. При этой гомотетии точка B перейдет в точку E , а точка D – в точку A , прямая DF перейдет в прямую AC , а BF – в EC .

Так как F – точка пересечения прямых DF и BF , она перейдет в точку пересечения прямых AC и EC , т.е. в точку C . Поэтому точки F , P и C лежат на одной прямой, а это и означает, что диагонали AD , BE и CF пересекаются в точке P .

30. Если $a^2 + b^2$ и $a + b$ делятся на d , то и $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ делится на d . Следовательно, $2a^2 = 2a(a + b) - 2ab$ и $2b^2 = 2b(a + b) - 2ab$ делятся на d .

Но если a и b взаимно просты, то a^2 и b^2 также взаимно просты, поэтому $2a^2$ и $2b^2$ не могут одновременно делиться ни на какое $d > 2$. (Здесь использована основная теорема арифметики, см. П2.)

31. а) Пусть C – точка, диаметрально противоположная точке A . Угол AMC – прямой. Так как $MK = KB$ и $PK \parallel MC$, то прямая PK пересекает отрезок BC в середине: $BH = HC$. Таким образом, все прямые PK проходят через точку H – середину отрезка BC .

б) Из а) следует, что множество точек P лежит на окружности, построенной на AH как на диаметре. Поскольку $\angle HBA$ – прямой, эта окружность проходит через точку B .

32. Ответ: $d = 2/3$.

Если отрезок заматает весь треугольник, то в некотором своем положении он проходит через его центр. Докажем, что из всех отрезков с концами на сторонах и проходящих через центр O правильного треугольника самый короткий – отрезок AB , параллельный его стороне.

Пусть $A'B'$ – какой-либо отрезок с концами на тех же сторонах и проходящий через центр треугольника, причем $OB' < OA'$ (рис.15). Тогда $AA' > BB'$ и ясно, что даже проекция

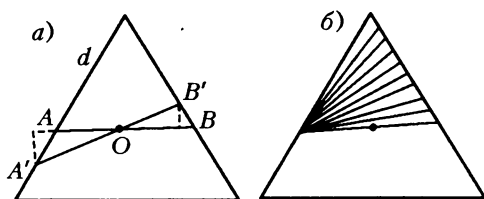


Рис. 15

этого отрезка на прямую AB имеет длину, большую $2/3$. Таким образом, отрезок, заматывающий весь треугольник, не может быть короче $2/3$.

С другой стороны, отрезком длины $2/3$ можно замести весь треугольник. Для доказательства нужно убедиться, что через любую точку P внутри треугольника можно провести отрезок длины $2/3$ с концами на сторонах треугольника. Проведем через P две прямые, параллельные самой близкой к P и самой далекой от нее стороне. Они пересекают треугольник по отрезкам, длина первого из которых больше $2/3$, а второго – меньше $2/3$. Будем поворачивать прямую, проходящую через P , из первого положения во второе; в некотором промежуточном положении длина отрезка, по которому она пересекает треугольник, будет в точности равна $2/3$.

∇ Заметим, что, при всей очевидности последнего утверждения, для его строгого доказательства нужны соображения непрерывности (П5),

33. Предположим, что можно уложить кости домино па доску так, что каждая из горизонтальных и вертикальных прямых, разделяющих доску на клетки, пересекает хотя бы одну кость домино.

Всего имеется 10 таких прямых. Каждая из этих прямых разбивает доску на 2 части, состоящие из четного числа клеток. В любой из этих частей содержится какое-то количество неразрезанных костей домино. Эти кости занимают четное число клеток. Оставшиеся клетки заняты половинками разрезанных

костей, а так как их четное число, то и число разрезанных костей тоже четно.

Итак, каждая из 10 прямых разрезает не меньше двух костей, а так как каждую кость пересекает только одна прямая, то число разрезанных костей не меньше 20.

Однако общее количество костей, покрывающих доску, — 18.

▽ Интересно выяснить, для каких прямоугольников $m \times n$ (с четным m) верно аналогичное утверждение. Этот вопрос разобран в решении задачи М63 из «Задачника Кванта» (см. «Квант», 1971, №10).

34. Можно считать, что числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Рассмотрим числа:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & a_2, & \dots, & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, \\ a_1 + a_n, & a_2 + a_n, & \dots, & a_{n-2} + a_n, & a_{n-1} + a_n, \\ a_1 + a_{n-1} + a_n, & \dots, & \dots, & a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, \\ \dots, & \dots, & \dots, & & & \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего; таким образом, все выписанные числа различны. Их количество $n + (n - 1) + \dots + 1 = n(n + 1)/2$ соответствует требованиям задачи.

Заметим еще, что первые n натуральных чисел дают пример n различных чисел, из которых нельзя составить больше чем $n(n + 1)/2$ различных сумм (эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$).

35. Из равенства углов (рис.16) следует, что точка A лежит на окружности, проходящей через точки C , D и E , а также, что точка B лежит на этой окружности, причем $DE \parallel AB$.

36. Пусть разность прогрессии равна d и один из ее членов $a = m^2$, где m — натуральное число. Тогда число

$$\begin{aligned} (m + kd)^2 &= m^2 + 2mkd + k^2d^2 = \\ &= a + (2km + k^2) \end{aligned}$$

также является членом прогрессии при любом натуральном k . Мы указали тем самым бесконечное количество членов прогрессии, являющихся квадратами натуральных чисел.

37. Ответ: нельзя. Цифра a образует 9 пар (с каждой из девяти остальных цифр). Чтобы для всех этих пар нашлась

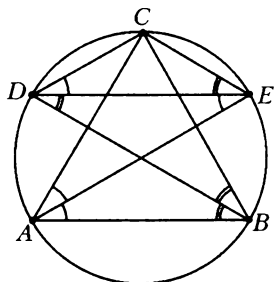


Рис. 16

сторона 45-угольника, занумерованная соответствующими цифрами, необходимо поставить a по крайней мере в пяти его вершинах. Так как цифр всего десять, то для их размещения необходимо 50 мест.

Поэтому требуемое в условии размещение цифр невозможно (П9).

∀ С другой стороны, если n четно, то числа $0, 1, \dots, n$ можно расставить в вершинах правильного $(n+1)(n+2)/2$ -угольника так, чтобы для каждой пары этих чисел нашлась сторона с соответствующими числами на концах.

38. Ответ: $a_{1,2} = \pm \sqrt[20]{2^{20} - 1}$; $b_{1,2} = \mp \sqrt[20]{2^{20} - 1}/2$, $p = -1$, $q = 1/4$ (всего два набора коэффициентов).

Подставляя $x = 1/2$, получим

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^{20} + \left(\frac{q}{4} + \frac{p}{2} + q\right)^{10} = 0,$$

откуда $a = -2b$.

Теперь тождество принимает вид

$$(x-1)^{20} = (-2bx + b)^{20} + (x^2 + px + q)^{10}.$$

Вычисляя коэффициент при x^{20} в обеих частях, получим

$$2^{20} = 2^{20}b^{20} + 1; \quad b = \pm \sqrt[20]{2^{20} - 1}/2.$$

Теперь тождество принимает вид

$$(x - 1/2)^{20} = (x^2 + px + q)^{10},$$

откуда $x^2 + px + q = (x - 1/2)^2$, т.е. $p = -1$, $q = 1/4$.

39. Ответ: $2 \cdot 3^n$. После первого шага сумма всех чисел будет равна $6 = 2 \cdot 3$.

Пусть S_n – сумма всех чисел после n -го шага. Нетрудно доказать, что после $(n+1)$ -го шага сумма станет равна $2S_n + S_n = 3S_n$.

Итак, сумма всех чисел каждый раз увеличивается втрое, так что на n -м шаге она будет равна $2 \cdot 3^n$.

∀ Возникающая здесь интересная последовательность обсуждается в задачах 219 из книги [10] и М233 из «Задачника Кванта» («Квант», 1974, №7).

40. Ответ: дуга окружности, касающейся боковых сторон треугольника в вершинах A и C основания.

Пусть ABC – данный треугольник, $AB = BC$ и M – некоторая точка искомого множества, E, F и H – ее проекции на стороны AB, BC и AC соответственно (рис.17). Четырехугольники $AEMH$

и $CHMF$ подобны: у них соответственно равны углы и по условию пропорциональны пары соседних сторон ($EM : MH = MH : MF$), тем самым подобны друг другу и треугольники, на которые они разбиваются диагоналями: $\triangle EMA \sim \triangle HMC$, $\triangle AMH \sim \triangle CMF$. Отсюда

$$\begin{aligned}\angle AMC &= \angle AMH + \angle HMC = \\ &= \angle HMC + \angle CMF = \angle HMF.\end{aligned}$$

Итак, величина $\angle AMC$ постоянна, откуда следует, что точка M принадлежит дуге окружности, опирающейся на отрезок AC .

Можно проверить, что любая точка этой дуги принадлежит искомому множеству точек.

Если искать множество точек, расстояние которых до прямой AC равно среднему геометрическому расстояний до прямых AB и BC , на всей плоскости, а не только внутри треугольника, то искомое множество дополнится кусками гипербол.

41. Ответ: углы треугольника – 90° , 45° , 45° .

Пусть h_a и h_b – высоты, опущенные на стороны a и b . По условию $a \leq h_a$, $b \leq h_b$, но в любом треугольнике $h_a \leq b$, $h_b \leq a$, так что $a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$.

Значит, $a = b = h_a = h_b$, т.е. треугольник равнобедренный и прямоугольный.

42. Предположим, что число $m(m+1)$ является k -й степенью некоторого натурального числа. Так как числа m и $m+1$ взаимно просты, то каждое из них должно быть k -й степенью натурального числа. Но это невозможно: если $m = a^k$, то уже

$$(a+1)^k > (a+1)a^{k-1} = a^k + a^{k-1} > m+1 \quad (k > 1).$$

43. Ответ: единиц получится на одну больше, чем двоек. Всякое число дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма его цифр (ПЗ). Поэтому в нашей задаче единицы получаются из чисел, дающих при делении на 9 остаток 1, т.е. из чисел 1, 10, 19, 28, 999999991, 1000000000, а двойки – из чисел, дающих в остатке 2, т.е. из чисел 2, 11, 20, 29, 999999992.

44. Какой бы набор из n чисел x_1, x_2, \dots, x_n (среди которых не все равны между собой) мы ни взяли, через несколько шагов

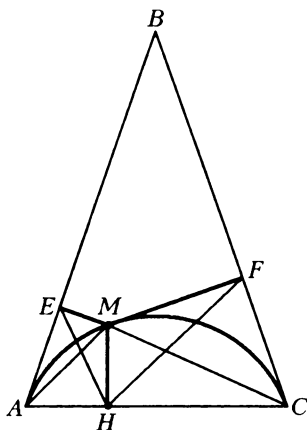


Рис. 17

максимальное число набора уменьшится, а минимальное увеличится.

Отсюда ясно, что максимальное число не может все время оставаться целым, если, конечно, не получится набора из равных чисел (a, a, a, \dots, a) .

Пусть из набора z_1, z_2, \dots, z_n впервые получается набор равных чисел:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2} = \dots = \frac{z_{n-1} + z_n}{2} = \frac{z_1 + z_n}{2}.$$

Тогда числа z_i равны через одно. При нечетном n это невозможно.

Пусть n четно. Посмотрим, из какого набора может получиться набор $(a, b, a, b, a, b, \dots, a, b)$. Пусть

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2} = \frac{y_n + y_{n-1}}{2} = a;$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{y_4 + y_5}{2} = \frac{y_n + y_1}{2} = b.$$

Тогда

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2an, \quad y_2 + y_3 + \dots + y_n + y_1 = 2nb,$$

т.е. $2an = 2nb$ и $a = b$.

Таким образом, набор из попарно равных чисел получен быть не может, что и доказывает утверждение задачи.

45. а) Величина каждого из углов шестиугольника 120° и, следовательно, противоположные его стороны параллельны.

Можно считать при этом, что $AB \geq DE$ (рис.18).

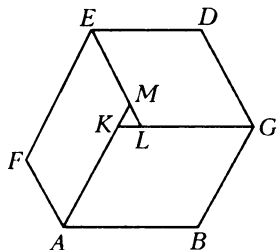


Рис. 18

Построим теперь параллелограммы $ABCK$, $CDEL$, $AFEM$. Если точки K , L , M не совпадают, то все углы треугольника KLM составляют по 60° , откуда $KL = LM = KM$ и, следовательно,

$$AB - DE = CD - FA = FE - BC.$$

б) Можно считать, что $a_1 > a_4$.

Построим правильный треугольник KLM со сторонами

$$KL = LM = MK = a_1 - a_4 = a_3 - a_6 = a_5 - a_2.$$

Отложим на продолжении KL отрезок $LC = a_4$, на продолжении LM — отрезок $ME = a_6$, на продолжении MK — отрезок $KA = a_2$ и построим параллелограммы $AKCB$, $CLED$, $AFEM$. Полученный шестиугольник $ABCDEF$ — искомый.

46. Ответ: единственное решение $x = y = 0$.

Пусть x и y — целые числа, удовлетворяющие условию. После ряда возведений в квадрат убеждаемся, что $\sqrt{x + \sqrt{x}} = m$ и $\sqrt{x} = k$ — целые числа, причем

$$m^2 = k(k+1). \quad (*)$$

Если $k > 0$, то должно быть $k^2 < m^2 < (k+1)^2$, тогда $k < m < k+1$ и поэтому m — не целое число. Значит, $k = 0$, т.е. $x = 0$.

▽ Заметим, что противоречивость равенства (*) следует также из задачи 42.

47. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — основания перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C и D на диагонали BD и AC , O — точка пересечения диагоналей, а α — величина острого угла между ними (рис. 19). Тогда $OA_1 = OA \cdot \cos \alpha$; $OB_1 = OB \cos \alpha$; $OC_1 = OC \cos \alpha$; $OD_1 = OD \cos \alpha$. Поэтому треугольники $A_1OB_1, B_1OC_1, C_1OD_1$ и D_1OA_1 подобны треугольникам AOB, BOC, COD и DOA с коэффициентом подобия $\cos \alpha$.

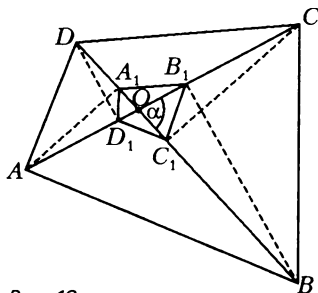


Рис. 19

Отсюда следует и подобие четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

▽ Заметим, что второй из четырехугольников получается из первого композицией следующих преобразований: симметрии относительно биссектрисы острого угла между диагоналями и гомотетии с центром O и коэффициентом $\cos \alpha$.

48. Ответ: n — простое число и $n = 9$.

Если n можно представить в виде $n = ab$, где $a \geq 3, b \geq 3, a \neq b$, то в произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$ входят множители $a, 2a$ и $b, 2b$, поэтому $(n-1)!$ делится на $a^2b^2 = n^2$.

Если $n = p^2$, где p — простое число, то при $p^2 - 1 \geq 4p$ в произведение $(p^2 - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p^2 - 1)$ входят числа $p, 2p, 3p$ и $4p$ и оно делится на $p^4 = n^2$. (Неравенство $p^2 - 4p - 1 \geq 0$ выполнено при всех простых $p \geq 5$.)

Остаются две возможности: n — простое число (в этом случае $(n-1)!$ не делится даже на n) и $n = 9$ (в этом случае $8!$ делится на 9, но не делится на 81).

▽ Согласно известной теореме Вильсона при простом p число $(p-1)!$ всегда дает остаток $(p-1)$ при делении на p .

49. Занумеруем отрезки, по которым полз жук, по порядку. Рассмотрим одно из трех направлений отрезков сети – назовем его горизонтальным. Докажем, что номера всех горизонтальных отрезков пути жука имеют одинаковую четность.

Пусть a и b – два соседних горизонтальных отрезка на этом пути, в том смысле, что путь между a и b состоит из отрезков двух других направлений. Ситуация, когда жук пересекает некото-

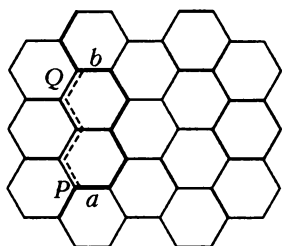


Рис. 20

рую вертикальную полосу шестиугольников сначала «туда», а потом «обратно» (изображенная на рис.20), невозможна: в этом случае путь жука можно было бы сократить (соединив точки P и Q пунктирной линией). Отсюда следует, что число промежуточных отрезков между a и b нечетно и что по этим отрезкам жук полз в одном направлении. Поэтому все вообще горизонтальные отрезки пути жука имеют номера одной четности (и жук ползет по ним в одном направлении).

Это относится и к отрезкам двух других направлений. Поскольку направлений всего три, то либо все отрезки с четными номерами, либо все отрезки с нечетными номерами имеют одинаковое направление. Таких отрезков ровно 50.

∇ Любой путь жука по сети можно задать начальным узлом и «словом» из букв p, q, r (каждая буква соответствует отрезкам пути, параллельным одному из трех направлений). Интересно описать слова, соответствующие замкнутым (приводящем в начальный узел) или несамопересекающимся путям.

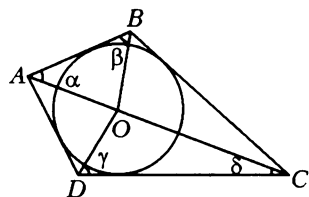


Рис. 21

50. Пусть O – центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности (рис.21). Так как

$$\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta, \quad \angle COD = 180^\circ - \gamma - \delta,$$

а

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180^\circ,$$

то

$$\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ.$$

51. Так как $k^n - b^n = (k - b)(k^{n-1} + k^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, то $k^n - b^n$ делится на $k - b$.

Таким образом, $(k^n - b^n) - (k^n - a) = a - b^n$ делится на $k - b$ при любом $k \neq b$, но это может быть только тогда, когда $a = b^n$.

52. Ответ: 2^{n-2} дробей.

Прежде всего ясно, что в полученной дроби x_1 будет стоять в числителе. Почти столь же очевидно, что x_2 окажется в знаменателе при любой расстановке скобок (знак деления, стоящий перед x_2 , относится либо к самому x_2 , либо к какому-либо выражению, содержащему x_2 в числителе).

Оказывается, что остальные буквы x_3, x_4, \dots, x_n могут располагаться в числителе или знаменателе совершенно произвольным образом; отсюда следует, что всего можно получить 2^{n-2} дробей: каждая из $n - 2$ букв x_3, x_4, \dots, x_n может оказаться независимо от остальных в числителе или знаменателе.

Докажем это утверждение по индукции. При $n = 3$ можно получить 2 дроби:

$$(x_1 : x_2) : x_3 = \frac{x_1}{x_2 \cdot x_3} \text{ и } x_1 : (x_2 : x_3) = \frac{x_1 x_3}{x_2},$$

так что утверждение справедливо.

Предположим, что оно справедливо при $n = k$, и докажем его для $n = k + 1$.

Пусть выражение $x_1 : x_2 : \dots : x_k$ после некоторой расстановки скобок записывается в виде некоторой дроби A . Если в это выражение вместо x_k подставить $x_k : x_{k+1}$, то x_k окажется там же, где и было в дроби A , а x_{k+1} будет стоять не там, где стояло x_k (если x_k было в знаменателе, то x_{k+1} окажется в числителе, и наоборот).

Теперь докажем, что можно добавить x_{k+1} туда же, где стоит x_k . В дроби A после расстановки скобок обязательно будет выражение вида $(p : x_k)$, где p — буква x_{k-1} или некоторая скобка; заменив $(p : x_k)$ выражением $((p : x_k) : x_{k+1}) = p : (x_k \cdot x_{k+1})$, мы получим, очевидно, ту же самую дробь A , где вместо x_k стоит $x_k \cdot x_{k+1}$. Тем самым утверждение доказано.

53. Легко видеть, что куб можно разбить на 5 тетраэдров. На рисунке 22 это тетраэдры $AA'B'D'$, $AB'BC$, $ACDD'$, $B'C'D'C$ и $ACD'B'$.

Докажем теперь, что на меньшее число тетраэдров разбить куб нельзя. Пусть куб разбит на несколько тетраэдров. Имеются по крайней мере два из них, основания которых лежат на грани

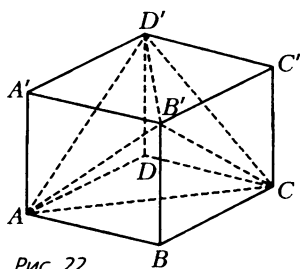


Рис. 22

$ABCD$ куба. Точно так же имеются по крайней мере 2 тетраэдра с основаниями на грани $A'B'C'D'$.

Эти тетраэдры заведомо отличны от первых двух, так как у тетраэдра не может быть двух параллельных граней. Итак, у нас уже есть 4 тетраэдра. Их общий объем не больше чем $2a^3/3$, т.е. меньше объема куба. Таким образом, на 4 тетраэдра куб разбить нельзя.

54. Ответ: $41^2 = 1681$.

Пусть число n^2 удовлетворяет условию задачи, тогда $n^2 = 100a^2 + b$, где $0 < b < 100$, Поэтому $n > 10a$ и, следовательно, $n \geq 10a + 1$. Это значит, что $b = n^2 - 100a^2 \geq 20a + 1$, откуда $20a + 1 < 100$, и поэтому $a \leq 4$.

При $a = 4$ лишь $n = 10a + 1 = 41$ удовлетворяет условию: если $n > 41$, то $n^2 - 40^2 \geq 42^2 - 40^2 > 100$.

∇ Эту тему продолжает задача 244.

55. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 и $2p_1, 2p_2, 2p_3, 2p_4$ — площади и периметры треугольников ABE, BCE, CDE и DAE соответственно. Нужно доказать равенство

$$\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4}.$$

Поскольку $ABCD$ — трапеция, $S_1 = S_3 = S$. Поскольку $ABCD$ — описанный четырехугольник, $AB + CD = BC + AD$. Прибавив к обеим частям этого равенства сумму диагоналей, получим $2p_1 + 2p_3 = 2p_2 + 2p_4$. Чтобы получить отсюда требуемое равенство, нужно разделить обе части на $2S$ и воспользоваться соотношениями, вытекающими из равенств

$$\frac{S_2}{S} = \frac{S}{S_4} = \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{p_2}{p_4}; \quad \frac{p_2}{S} = \frac{p_4}{S_4}; \quad \frac{p_4}{S} = \frac{p_2}{S_2}.$$

56. Ответ: минимальное значение s_{\min} равно $-[n/2]$, т.е. $-n/2$, если n четно, и $-(n-1)/2$, если n нечетно.

а) Сумму s всевозможных попарных произведений чисел x_1, x_2, \dots, x_n можно записать так:

$$s = \frac{1}{2} \left((x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 \right).$$

Отсюда видно, что $s \geq -n/2$.

Если n четно, то, положив половину из x_k равными 1, а половину равными -1 , получим $s = -n/2$. Если же n нечетно, то (поскольку s — целое число) $s \geq -(n-1)/2$; наименьшее значение s достигается, если среди x_k имеется $(n+1)/2$ единиц и $(n-1)/2$ минус единиц.

б) Сводится к задаче а): каждое из x_k можно последовательно заменить на 1 или -1 так, что величина суммы всевозможных попарных произведений не будет увеличиваться (правило замены: x_k заменяем на -1 , если сумма остальных чисел неотрицательна, и на 1, если отрицательна). Поэтому здесь такой же ответ, как в задаче а).

57. Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9$ — числа, написанные на карточках. Если $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$, то первый ставит число a_9 в клетку 2 (рис.23), а вторым своим ходом — число a_2 (или a_1) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$, то первый ставит число a_1 в клетку 2, а вторым своим ходом — число a_9 (или a_8) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, то первый может применить любую из описанных выше стратегий (при правильной игре второго результат игры в этом случае — ничья).

	1	
2		3
	4	

Рис. 23

58. Пусть L , M и N — середины дуг AB , BC и CA , O — центр вписанной окружности треугольника ABC , D и K — точки пересечения отрезка LN со сторонами AB и AC (рис. 24).

Докажем, что четырехугольник $ADOK$ — ромб (заодно мы решим и задачу 237). Для этого достаточно убедиться, что диагонали AO и DK служат осями симметрии этого четырехугольника.

В самом деле, $AM \perp LN$, поскольку $\overset{\frown}{LB} + \overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{AN} = 180^\circ$; поэтому точки D и K симметричны относительно прямой AM (биссектрисы угла BAC), точки A и O симметричны относительно прямой LN (биссектрисы угла ANB).

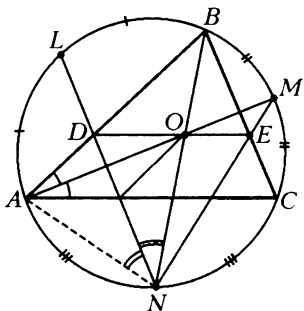


Рис. 24

Отсюда следует, что $DO \parallel AC$; аналогично можно доказать, что $EO \parallel AC$, где E — точка пересечения отрезка MN со стороной

BC. Итак, точки D , O и E лежат на одной прямой, параллельной AC .

59. Если счастливый билет имеет номер A , то билет с номером $A' = 999999 - A$ также счастливый и $A' \neq A$. Поскольку $A + A' = 1001 \cdot 999 = 13 \cdot 77 \cdot 999$ делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

60. Если катер входит в круг K , освещаемый прожектором, в точке A , то через промежуток времени $5\pi/2 \cdot a/v$ — он будет

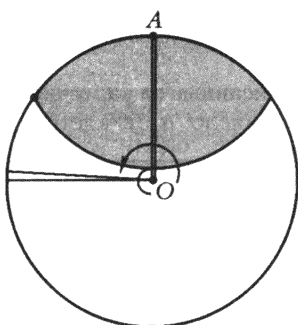


Рис. 25

находиться на расстоянии не больше $5\pi/2 \cdot a/v \cdot v/8$ от точки A — в одной из точек заштрихованного на рисунке 25 пересечения круга K и круга радиуса $5\pi a/16 < a$ с центром A . Легко видеть, что за это время луч прожектора повернется на угол $5\pi/2$ и «просмотрит» всю заштрихованную область, следовательно, катер будет обнаружен.

∇ Более тонкие рассуждения (см. [5], «задача про катер» 4.13) показывают, что наименьшая скорость, при которой катер сможет подойти к острову, равна $v_{\min} = v \cos \beta$, где β — корень уравнения $2\pi + \beta = \operatorname{tg} \beta$, $0 < \beta < \pi/2$; $v_{\min} \approx 0,13v$.

61. Возьмем одного из дружинников. Если бы требуемое распределение дежурств было возможно, то остальные 99 дружинников должны были бы разбиться на пары, которые дежурили бы вместе с выбранным дружинником, а это невозможно, так как 99 — нечетное число.

∇ Задача о том, для каких n можно выделить из элементов $\{1, 2, \dots, n\}$ систему троек так, чтобы каждая пара попала ровно в одну тройку (систему «троек Штейнера»), подробно обсуждается в книгах [58], [64].

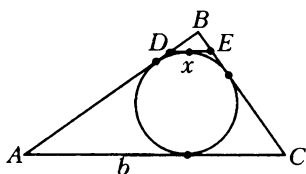


Рис. 26

62. Пусть x — длина искомого отрезка, b — длина основания AC треугольника ABC (рис. 26). Периметр треугольника BDE равен $2p - 2b$ (убедитесь в этом, используя

свойство касательных к окружности).

Из подобия $\triangle BDE$ и $\triangle ABC$ получаем

$$x = \frac{1}{p} b(p - b) = \frac{1}{p} \left(\frac{p^2}{4} - \left(b - \frac{p}{2} \right)^2 \right).$$

Максимальное значение x равно $p/4$ и достигается при $b = p/2$.

63. Нетрудно доказать, что $x_{ii} = 0$ и $x_{ik} = -x_{ki}$ для всех i и k . Сложив теперь n уравнений $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ с фиксированными i и j ($k = 1, 2, \dots, n$), получим

$$nx_{ij} = s_i - s_j,$$

где s_j — сумма всех чисел вида x_{jk} ($k = 1, 2, \dots, n$). Положим теперь $a_i = s_i/n$, тогда $x_{ij} = a_i - a_j$, что и требовалось.

64. Ответ: можно.

В квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ на прямой $y = 1/2$ равномерно расставим $c_0 = 200$ точек: $(k/201; 1/2)$, $k = 1, 2, \dots, 200$. Затем на каждой из прямых $y = 1/4$ и $y = 3/4$ расставим по $c_1 = 100$ точек $(k/101; 1/4)$, $(k/101; 3/4)$, $k = 1, 2, \dots, 100$. Повторяя этот процесс, для $m = 2, 3, \dots, 7$ на каждой прямой $y = (2l-1)2^{-m-1}$, $1 \leq l \leq 2^m$, расставим по c_m точек $\left(\frac{k}{c_m+1}; \frac{2l-1}{2^{m+1}}\right)$, где $c_m = \lceil 200 \cdot 2^{-m} \rceil$ (при $m = 7$ на 128 соответствующих прямых будет поставлено по одной точке). Всего поставлено

$$\sum_{m=0}^7 2^m c_m = 200 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 50 + 8 \cdot 25 + 16 \cdot 12 + 32 \cdot 6 + 64 \cdot 3 + 128 = 1704 \text{ точек.}$$

Эту конструкцию поясняет рисунок 27.

Ясно, что никакой прямоугольник площади $1/200$ не втиснется между расставленными точками. Если он пересекает прямую $y = 1/2$, то его основание не больше $1/201$; если нет, то он расположен целиком выше или ниже этой прямой. При этом, если он пересекает прямую $y = 3/4$ или $y = 1/4$, его высота не больше $1/2$, а основание не больше $1/101$ и т. д. Если прямоугольник целиком расположен между прямыми вида $y = n/256$ ($n = 1, 2, \dots, 255$), то его высота не больше $1/256$.

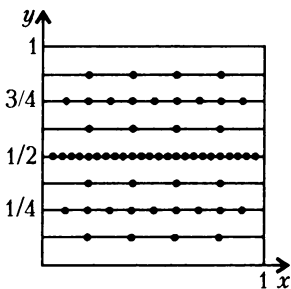


Рис. 27

65. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — данные числа, занумерованные в порядке возрастания их дробных частей $\alpha_i = x_i - [x_i]$.

Округлим первые k из этих чисел в меньшую сторону, а остальные — в большую; k будет выбрано ниже. Легко видеть, что

наибольшая ошибка при округлении будет накапливаться при вычислении одной из сумм

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \text{ или } x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n.$$

Модуль первой из ошибок равен

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq k\alpha_k,$$

а второй

$$(1 - \alpha_{k+1}) + \dots + (1 - \alpha_n) \leq (n - k)(1 - \alpha_{k+1}).$$

Выберем теперь k так, чтобы выполнялись неравенства

$$k\alpha_k \leq (n+1)/4 \text{ и } (n-k)(1 - \alpha_{k+1}) \leq (n+1)/4.$$

Для этого достаточно взять наибольшее k , для которого выполнено первое неравенство; тогда $\alpha_{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$, поэтому выполнено и второе неравенство $1 - \alpha_{k+1} < 1 - \frac{n+1}{4(k+1)} \leq \frac{n+1}{4(n-k)}$ (поскольку $\frac{n+1}{4(k+1)} + \frac{n+1}{4(n-k)} = \frac{(n+1)^2}{4(k+1)(n-k)} \geq 1$ при $0 < k < n$).

∇ Для нечетного n оценка погрешности, указанная в условии, точная (пример: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/2$). Для четного n ее можно несколько улучшить, заменив $\frac{n+1}{4}$ на $\frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1}$ (пример: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n}{2(n+1)}$).

66. Турист может идти от кафе по произвольному маршруту с одним условием: попав на площадь, он выбирает следующую улицу из тех, по которым он шел до этого нечетное число раз. Нетрудно видеть, что такая улица существует для любого перекрестка, кроме вокзального (в самом деле, турист подходил к перекрестку на один раз больше, чем уходил от него), а также, что полученный маршрут не может дважды проходить по одной и той же улице. Поскольку количество улиц конечно, то турист в конце концов придет на вокзал.

67. а) Первое решение. Каждая пара членов комиссии могла встретиться не более чем на одном заседании. На каждом заседании было $C_{10}^2 = 45$ пар. Так как было 40 заседаний, то из членов комиссии можно образовать не меньше $1800 = 45 \cdot 40$ пар. Но из 60 (или меньше) человек можно образовать не больше $C_{60}^2 = 60 \cdot 59/2 < 1800$ пар.

Второе решение. Пусть число N членов комиссии не больше 60. Тогда, так как $10 \cdot 40/N > 6$, то найдется человек, побывавший по крайней мере на семи заседаниях. Все те люди, с которыми он встречался, — разные и их общее количество $7 \cdot 9 > 59$. Противоречие.

б) Эта задача решается точно так же, как и а) (годится любое решение).

▽ Любопытно, что приведенная здесь оценка является точной: 30 комиссий по 5 человек, удовлетворяющих требованиям; задачи, составить можно.

68. Ответ: б) $(p-1)(q-1)/2$. Если p и q — взаимно простые натуральные числа, то каждое целое число z представляется в виде $z = px + qy$ (П2). Всякое такое представление получается из некоторого фиксированного $z = pa + qb$ по общей формуле $z = p(a - qt) + q(b + pt)$, где t — целое, причем существует единственное представление, для которого $0 \leq x \leq q-1$.

Каждому целому числу z мы сопоставили пару (x, y) целых чисел такую, что $0 \leq x \leq q-1$, $z = px + qy$. Разным числам при этом соответствуют разные пары, причем z будет хорошим только при $y \geq 0$. (Если $z = px + qy$ — хорошее число, то при $x = qt + r \geq 0$, $0 \leq r \leq q-1$, имеется представление $z = pr + q(y + t)$.)

Теперь заметим, что если число $z = px + qy$, $0 \leq x \leq q-1$ — хорошее, то число $z' = (q-1-x)p + (-1-y)q - (x, y)$ — плохое и, наоборот, если z — плохое, то z' — хорошее. Точки (x, y) и $(q-1-x, -1-y)$ симметричны относительно точки $(x_0, y_0) = \left(\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, а сами числа z и z' симметричны относительно точки $z_0 = px_0 + qy_0 = (pq - p - q)/2$, поскольку $z + z' = pq - p - q = 2z_0 = c$.

Тем самым доказано а): хорошему числу z соответствует плохое (симметричное ему) $c - z = z'$ и наоборот.

Поскольку наименьшее хорошее число 0, то наибольшим плохим будет c , а всего плохих чисел будет $(c+1)/2 = (p-1)(q-1)/2$.

▽ Очень полезно, разбирая решение этой задачи, опираться на геометрическую иллюстрацию: пары (x, y) — точки плоской решетки, $px + qy = z$ — проходящие через них прямые и т.д. (см. «Квант», 1973, № 11, решение задачи М194).

69. Ответ: через $\frac{\pi}{200}$ ч. Нужно заметить, что траектория воображаемой «ракеты» в условиях задачи — окружность вдвое

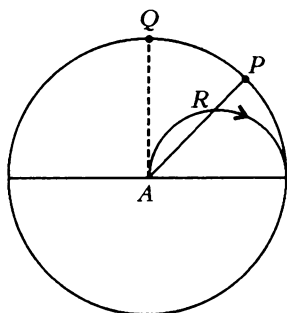


Рис. 28

меньшего радиуса (рис.28): градусная величина дуги AR вдвое больше $\angle QAP$ (угла между касательной и хордой), т.е. вдвое больше градусной величины дуги QP вдвое большего радиуса; поэтому длины этих дуг (для каждого положения R) равны. До встречи самолет пройдет четверть окружности, ракета – половину.

▽ Нужно было бы, конечно, доказать единственность траектории ракеты, удовлетворяющей условию (от

участников олимпиады это не требовалось: в то время в школе не изучали производную). Она вытекает сравнительно несложно из общей теоремы о единственности функции с данным значением при $t = 0$ и данной производной; если в момент времени t ракета ушла на расстояние $AR = AQf(t)$ от точки A (причем $f(0) = 0$), то ее скорость в перпендикулярном радиусу направлении – $vf(t)$,

по радиусу – $v\sqrt{1-f^2(t)} = f'(t)$, так что $\frac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}} = v$, т.е. $(\arcsin f(t))' = v$, откуда $f(t) = \sin vt$.

70. Пусть A и B – две вершины многогранника, удаленные на расстояние d . Через точки A и B проведем плоскости, перпендикулярные прямой AB .

Ясно, что весь многогранник заключен между этими двумя плоскостями. Через каждую вершину многогранника проведем плоскость, перпендикулярную AB . Рассмотрим две соседние из проведенных плоскостей. Между ними расположены, очевидно, по крайней мере три отрезка ребер. Проекция каждого отрезка на прямую AB не меньше длины этого отрезка, причем среди них наверняка найдутся отрезки, не параллельные AB . Поэтому общая сумма длин всех таких отрезков, т.е. сумма длин ребер, больше чем $3 \cdot AB = 3d$.

Короче это решение можно пояснить так: проекция остова многогранника на отрезок покрывает его по меньшей мере троекратно.

71. Примем радиус планеты за 1. Возьмем на планете произвольные диаметрально противоположные точки (полюсы), проведем через них некоторый «основной» меридиан, разделим его на равные дуги длины ε и через точки деления проведем параллели (рис.29).

Экипажу корабля предлагается следующий план поиска:

корабль начинает облет планеты, двигаясь на постоянном расстоянии $R > 1$ от центра планеты над отмеченными параллелями, причем начинается от «северного» полюса и каждый раз, дойдя до основного меридиана, перелетает вдоль него на следующую параллель. Пусть теперь $R = \sqrt{2}$. Тогда у корабля видна «сферическая шапочка» радиуса $\pi/4$ (все расстояния измеряются по сфере).

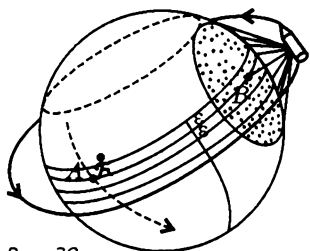


Рис. 29

Поскольку ϵ можно выбрать произвольно малым, нужно лишь проверить, что при отношении скоростей, большем 10, житель планеты не успеет пересечь «полосу обнаружения» корабля с юга на север, пока тот летает по одной параллели. Это почти очевидно. Любая параллель короче экватора. Центр «круга обнаружения» перемещается по параллели со скоростью, по крайней мере в $10/\sqrt{2}$ большей скорости жителя. Если житель пересекает параллель в точке A , когда корабль находится в B , то одна из дуг AB параллели не больше π , и пока корабль проходит ее, житель успевает отойти от A на расстояние не больше $\pi\sqrt{2}/10 < \pi/4$, так что в момент нахождения в A корабль должен (был или будет) увидеть его.

72. Возьмем две ближайшие друг к другу планеты. Ясно, что астрономы на этих планетах смотрят друг на друга.

Остается еще $n - 2$ планеты и $n - 2$ астронома. Если хотя бы один из них смотрит на уже выбранную планету, то на одну из $n - 2$ планет не хватает астрономов. Если же на эти две планеты никто больше не смотрит, то снова можно применить то же рассуждение: выбираем уже из $n - 2$ планет две ближайшие и т.д. Поскольку n нечетно, в конце концов останется одна планета, которую никто не наблюдает.

73. а) Если точка P лежит на прямой AD , утверждение очевидно.

Пусть P не лежит на AD и O — середина отрезка AD . Пусть P' — точка, симметричная точке P относительно O . Четырехугольники $BPCP'$ и $P'APD$ — параллелограммы и $AP + PD = AP' + AP > P'B + PB = BP + PC$.

б) В условии P — произвольная точка. Выбирая $P = A$, получим $AD \geq AB + AC$. Теперь положим $P = D$; тогда $AD \geq BD + DC$. Сложив эти неравенства, получаем $2AD \geq AB + AC + BD + CD$.

С другой стороны, всегда $AD \leq AC + CD$ и $AD \leq AB + BD$, причем в каждом из неравенств равенство возможно, лишь когда три точки лежат на одной прямой. Складывая их, получим $2AD \leq BD + AB + AC + CD$. Сопоставляя с полученным ранее, получаем $2AD = BD + AB + AC + CD$. Отсюда сразу следует, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой и все ранее выписанные неравенства являются равенствами; из них следует, что точки B и C лежат на отрезке AD и $AB = CD$.

74. Ответ: таких чисел x и y нет.

В самом деле, пусть $x \geq y$. Тогда $x^2 < x^2 + y \leq x^2 + x < (x+1)^2$, т.е. $x^2 + y$ не является квадратом целого числа.

75. а) Достаточно доказать, что k -й по росту восьмиклассник выше k -го семиклассника. Пусть A — k -й по росту семиклассник. Тогда существует не меньше k семиклассников (в их число входит и A), которые не ниже A . Все k восьмиклассников, стоящих за ними, выше A . Поэтому k -й по росту восьмиклассник выше A .

б) Сводится к задаче а): достаточно провести те же рассуждения для любых двух колонн.

76. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ на клетчатой бумаге размерами $m \times n$ клеток (рис.30). Обозначим количества кратчайших путей, ведущих из вершин

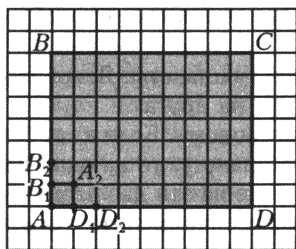


Рис. 30

вершин B_1, D_1, B_2, D_2 и A_2 в C по линиям сетки, через b_1, d_1, b_2, d_2 и a_2 соответственно. Утверждение задачи состоит в том, что $d_1/b_1 = n/m$. Докажем его индукцией по $m+n$, причем сразу для любого, не обязательно целого, отношения $n/m = k$. Начало индукции ($m = 1$ или $n = 1$) очевидно. Будем считать, что $m > 1, n > 1$.

По предположению индукции, примененному к прямоугольникам меньших размеров $(m-1) \times n$ и $m \times (n-1)$,

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{n}{m-1} \quad \text{и} \quad \frac{d_2}{a_2} = \frac{n-1}{m}.$$

Поэтому

$$\frac{d_1}{b_1} = \frac{d_2 + a_2}{b_2 + a_2} = \frac{d_2/a_2 + 1}{b_2/a_2 + 1} = \frac{(n-1)/m + 1}{(m-1)/n + 1} = \frac{n}{m}.$$

∇ По существу в решении этой задачи доказаны равенства

$$C_{m+n-1}^{m-1} = n C_{m+n-1}^m = (m+n-1) C_{m+n-2}^{m-1}$$

(в нашей задаче $n = km$). Зная формулу для чисел C_n^m (П10), их нетрудно проверить; но можно, наоборот, использовать эти равенства для вывода общей формулы для «чисел сочетания» C_n^m .

77. Докажем утверждение задачи по индукции. При $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо.

Предположим, что для n чисел a, a_3, \dots, a_{n+1} существует сумма s' вида $\pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n$, для которой $0 < s' \leq a_2$.

Тогда либо $0 \leq s' \leq a_1$, но тогда $0 \leq s = a_1 - s' \leq a_1$, либо $a_1 < s' \leq a_2 \leq 2a_1$, а тогда $s = s' - a_1 \leq a_2 - a_1 \leq a_1$, что и требовалось.

78. Решим эту задачу для произвольного выпуклого n -угольника площади S и периметра P .

Пусть длины сторон этого многоугольника a_1, a_2, \dots, a_n ($a_1 + a_2 + \dots + a_n = P$). Рассмотрим прямоугольник площади S с основанием P , высота его равна, очевидно, S/P .

Разрежем теперь этот прямоугольник вертикальными отрезками на n прямоугольников с основаниями a_1, a_2, \dots, a_n и приложим каждый из получившихся прямоугольников к соответствующей стороне изнутри.

Некоторые прямоугольники будут налезать друг на друга, некоторые могут «вылезать» за пределы данного многоугольника, и поэтому, поскольку их общая площадь равна S , а площадь многоугольника — тоже S , не покроют его целиком. Любая не покрытая точка может служить центром требуемого круга радиуса S/P .

✓ Для четырехугольника задачу можно решить иначе, но на олимпиаде несколько участников придумали решение, годящееся для любого n -угольника.

79. Назовем длиной пути число отрезков, из которых он состоит. Пусть n — длина кратчайшего пути из A в B . Докажем утверждение задачи индукцией по n .

При $n = 1$ кроме кратчайшего пути AB существует путь, идущий из A в перекресток $C \neq A$, удаленный от B на 1, и не проходящий через B .

Пусть $n > 1$, D — ближайший к A перекресток на кратчайшем пути из A в B . По предположению индукции, существует два непересекающихся пути p и q из D в B . Будем идти из A по пути l , не проходящем через D . Если этот путь не пересекается с путями p и q , то все доказано. Если же он впервые пересекает, скажем, путь p , то дальше следует идти по p прямо в B . Полученный путь не пересекается с q .

80. Пусть h^* и PH — высоты тетраэдра, опущенные из точек

A и P соответственно, h_a, h_b и h_c – высоты треугольника ABC , PL – высота треугольника PBC .

Имеем $h^* S_{PBC} = HP \cdot S_{ABC}$, а так как $h^* \geq HP$, то $S_{PBC} \leq S_{ABC}$, откуда получаем $PL \leq h_a$, тем самым $HL < PL \leq h_a$.

Итак, расстояние от H до прямой BC меньше h_a , так что точка H лежит внутри полосы, образованной двумя параллельными прямыми, которые удалены от прямой BC на расстояние h_a .

Аналогично доказывается, что точка H удалена от AC и AB на расстояния, меньшие h_b и h_c соответственно.

Таким образом, точка H принадлежит пересечению всех трех полос, т.е. лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$, у которого точки A, B, C являются серединами сторон. Наоборот, если H – произвольная точка внутри $\Delta A_1B_1C_1$ и точка P выбрана вблизи H так, что прямая PH перпендикулярна плоскости ABC , то расстояния от точки P до сторон треугольника ABC меньше соответствующих высот, и PH – наименьшая из высот тетраэдра $PABC$.

81. Опишем вокруг каждой из данных точек радиуса $1/2$. Сумма диаметров этих кругов равна 100.

Если какие-то два круга пересекаются, то заменим их одним кругом, а именно кругом наименьшего диаметра, содержащего эти два. Сумма диаметров при этом не увеличится, а число кругов уменьшится.

Продолжая эту процедуру, мы получим систему попарно не пересекающихся кругов, содержащих все данные точки, причем сумма диаметров этих кругов не больше 100. Отметим, что расстояние от каждой точки до границы круга не меньше $1/2$.

Пусть r – наименьшее расстояние между кругами. Если $r > 1$, то все доказано. При $r \leq 1$ заменим каждый из кругов concentрическим с ним кругом, радиус которого на $\frac{1}{2} - \frac{r}{3}$ меньше.

Полученная система кругов полностью удовлетворяет условию.

82. Ответ: $2d/(\operatorname{ctg}(\alpha/2)\operatorname{ctg}(\beta/2))$ км/с.

Пусть самолет переместился за 1 с из точки P в точку Q , $PQ = r$. Нас интересует наименьшее возможное значение r , если $AB = d$ постоянно; вместо этого мы можем искать максимальное значение отношения d/r , причем удобно считать постоянным r .

Теперь можно переформулировать задачу следующим образом; среди всех точек A и B пространства, из которых данный отрезок PQ виден под углами α и β соответственно, найти такие, для которых AB имеет наибольшую возможную величину.

Так как $\angle PAQ = \alpha$, то точка A находится на поверхности, получаемой вращением сегмента, вмещающего угол α , вокруг его хорды PQ . На аналогичной поверхности находится и точка B (на рисунке 31 изображено осевое сечение этих поверхностей). Легко доказать, что наибольшее расстояние между A и B достигается, когда эти точки «диаметрально противоположны» (точки A_0 и B_0 на рисунке). Для такого расположения точек A и B имеем $2d/r = \operatorname{ctg}(\alpha/2) + \operatorname{ctg}(\beta/2)$. Отсюда получим ответ.

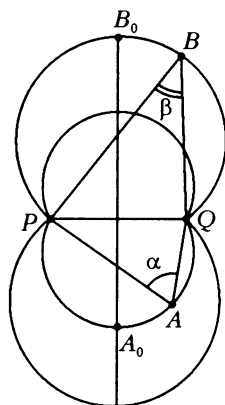


Рис. 31

83. Ответ: 30. Опишем стратегию второго игрока, которая обеспечит ему такую сумму. Разобьем все числа на пары $(1, 2), (3, 4), \dots, (19, 20)$. Каждый раз, когда первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел, кроме 19 и 20, второй должен ставить противоположный знак перед числом той же пары. Как только первый ставит какой-нибудь знак перед числом последней пары, второй ставит тот же знак перед другим из этих чисел. Ясно, что окончательная сумма по модулю будет не меньше чем

$$19 + 20 - \underbrace{1 - 1 - 1 - \dots - 1}_{9 \text{ раз}} = 30.$$

Докажем теперь, что первый может не позволить второму выбрать больше 30, если будет при каждом своем ходе ставить перед наибольшим из оставшихся чисел знак, противоположный знаку имеющейся к этому моменту суммы (если сумма равна нулю, то ставится плюс).

Рассмотрим некоторую партию. Пусть k -й ход – последний, в результате которого сумма меняет знак (включая ходы, перед которыми сумма равна нулю). За первые $k - 1$ ходов будут заведомо использованы числа $20, 19, 18, 20 - (k - 1)$. Так что максимальная по модулю сумма, которая может получиться после k -го хода $20 - (k - 1) + 20 - k = 41 - 2k$. За каждый из следующих $10 - k$ ходов сумма уменьшается по крайней мере на 1, так как первый каждый раз вычитает из модуля суммы наибольшее из оставшихся чисел m , а второй не может добавить к нему больше $m - 1$. Итак, в результате сумма будет не больше чем $41 - 2k - (10 - k) = 31 - k \leq 30$.

84. а) Величина угла B прямоугольного треугольника равна (или меньше) 30° , если длина противолежащего углу B

катета равна (соответственно меньше) половине длины гипотенузы.

Пользуясь этим для треугольников BMK и BML (рис.32,а, $MK \perp BC$), получим: $\angle MBC = 30^\circ$, так как $BM = AH = 2MK$; $\angle MBA < 30^\circ$, так как $BM = AH \geq EC = 2ML$, следовательно, $\angle B = \angle MBC + \angle MBA < 60^\circ$.

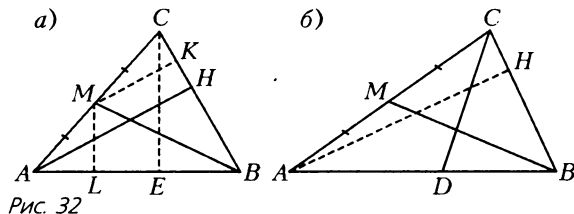


Рис. 32

Заметим, что слово «остроугольный» в формулировке задачи необходимо: без него утверждение задачи неверно.

б) Из задачи а) следует, что $\angle B \leq 60^\circ$. Поэтому достаточно доказать, что сторона AC не меньше остальных сторон: тогда $\angle A \leq \angle B \leq 60^\circ$ и $\angle C \leq \angle B \leq 60^\circ$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол), а из этих неравенств сразу же получается, что $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

Для доказательства заметим, что BM — наименьшая из медиан, так как медиана к стороне BC не меньше высоты $AH = BM$, а медиана к стороне AB не меньше биссектрисы CD (ведь биссектриса делит сторону AB в отношении $AC : BC$; рис.32,б). Но во всяком треугольнике большей медиане соответствует меньшая сторона: достаточно заметить, что центр тяжести (точка пересечения медиан) $\triangle ABC$ лежит по ту же сторону от серединного перпендикуляра к стороне AC , что и вершина C .

85. а) Если сумма двух чисел a и b состоит из одних девяток, то при сложении этих чисел не может быть переносов единицы в следующий разряд. Поэтому $S(a + b) = S(a) + S(b)$, где $S(x)$ — сумма цифр числа x . При этом если $S(a) = S(b)$, то $S(a + b)$ четно и не может равняться $9 \cdot 1967$.

б) Если последняя цифра числа a не равна нулю, то сумма ее с последней цифрой числа b равна 10, а суммы цифр в каждом из остальных девяти разрядов равны 9. Отсюда следует, что $2S(a) = 9 \cdot 9 + 10 = 91$, что невозможно.

86. а) Проведем прямую l так, чтобы в каждой из полуплоскостей, на которые делится плоскость этой прямой, было по две из данных точек. Ясно (рис.33), что два прожектора, помещенных в точки одной из этих полуплоскостей, могут осветить другую полуплоскость.

б) Проведем плоскость так, чтобы четыре из данных точек лежали по одну сторону от нее, а остальные четыре – по другую. Пользуясь задачей а), нетрудно доказать, что прожекторы, помещенные в четыре точки одного из полупространств, могут осветить другое полупространство.

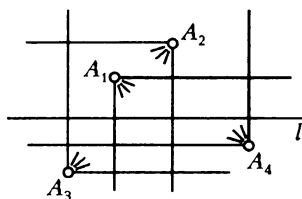


Рис. 33

Далеко идущее обобщение этой задачи было найдено десять лет спустя двумя однофамильцами – «олимпиадниками» разных поколений [70]. Оказывается, любые n данных углов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 360^\circ$, можно поместить в данных n вершинах так, что они покроют всю плоскость.

87. Ответ: а) нельзя. Заметим, что никакие два из чисел 0, 1, 2, 8, 9 не могут стоять рядом. Значит, они должны стоять через одно. Однако число 7 не может оказаться ни на одном из оставшихся мест, ведь рядом с ним из выписанных чисел может стоять только 2.

б) **Ответ:** нельзя. Рассуждение аналогично а). Никакие два из чисел 1, 2, 3, 11, 12, 13 не могут стоять рядом; из этих чисел только 1 может стоять рядом с 4 и только 13 рядом с 10, значит, 10 и 4 должны стоять рядом, но это противоречит условию.

✓ Любопытно отметить, что для четырнадцати чисел (и, по видимому, для любого $n \geq 14$) такая расстановка возможна:

–12 – 9 – 13 – 10 – 14 – 11 – 7 – 4 – 1 – 5 – 2 – 6 – 3 – 8 –.

88. Число 5^{1000} оканчивается на 5. Пусть в десятичной записи этого числа на k -м месте, считая от конца, стоит 0, а все следующие цифры отличны от 0. Прибавим к этому числу $5^{1000} \cdot 10^{k-1}$. В результате получится число, делящееся на 5^{1000} , у которого отличны от нуля последние k цифр. Продолжая эту процедуру, можно получить число, у которого последние 1000 цифр отличны от нуля. Теперь отбросим все цифры, кроме 1000 последних. Полученное число, очевидно, тоже делится на 5^{1000} .

89. Ответ: (0; –1), (–1; –1), (0; 0), (–1; 0), (5; 2), (–6; 2).

Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив к ним по 1, получим

$$(2x+1)^2 = (2y^2+y)^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2y^2+y+1)^2 - (y^2-2y).$$

Если y – целое и отлично от –1, 0, 1 и 2, то $3y^2 + 4y + 1 > 0$ и

$y^2 - 2y > 0$, при этом

$$(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2.$$

Эти неравенства означают, что $(2x + 1)^2$ лежит между двумя последовательными квадратами, а это при целых x невозможно. Подставив в уравнение $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ и $y = 2$, найдем ответ.

90. Ответ: 2952. Докажем, что длина (число членов) последовательности, удовлетворяющей условию задачи, у которой наибольший член — второй и равен n , не превосходит $d_n = \lceil 3(n+1)/2 \rceil$, причем для последовательности $n-1, n, 1, \dots, 1, 1$ длина в точности равна d_n .

Будем рассуждать по индукции. Для $n \leq 4$ утверждение легко проверить перебором ($d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$, $d_4 = 7$). Оценим максимальную длину последовательности с началом $a, n, n-a, a, \dots$ ($a < n$), считая, что для меньших n утверждение доказано. При $1 \leq a < n/2$ ее длина не больше $d_{n-a} + 1$, поскольку, убрав первый член a , можно заменить ее начало таким: $n-2a, n-a, \dots$; при $n/2 \leq a < n-1$ она не больше $d_a + 2$ — достаточно убрать первые два члена. Таким образом, остается лишь проверить, что для таких a выполнены неравенства соответственно $d_{n-a} + 1 \leq d_n$ и $d_a + 2 \leq d_n$. При $a = n-1$ — для последовательности $n-1, n, 1, n-1, n-2, 1, n-3, \dots, 1, 1$ — достаточно убрать первые три члена и переставить два следующих, чтобы осталось лишь проверить равенство $d_{n-3} + 3 = d_n$.

Из общего утверждения при $n = 1967$ получаем ответа $d_{1967} = \lceil 3 \cdot 1968/2 \rceil = 2952$.

91. Если король будет двигаться из левого нижнего угла доски в правый верхний угол по диагонали, то на каком-то ходу он обязательно встанет под удар белой ладьи.

Для доказательства достаточно заметить, что после первого хода короля все белые ладьи должны быть выше третьей горизонтали и правее третьей вертикали (после король встанет под удар следующим ходом).

Точно так же перед ходом короля в правый верхний угол все ладьи должны быть ниже 998-й горизонтали и левее 998-й вертикали.

Всего до своего последнего хода по диагонали король сделает 997 ходов. При этом каждая ладья при движении короля должна сделать 2 хода (сменить горизонталь и вертикаль, на которых она находилась первоначально), но ладей 499, и на это им понадобилось бы $2 \cdot 499 = 998 > 997$ ходов.

92. Ответ: $S = 1$.

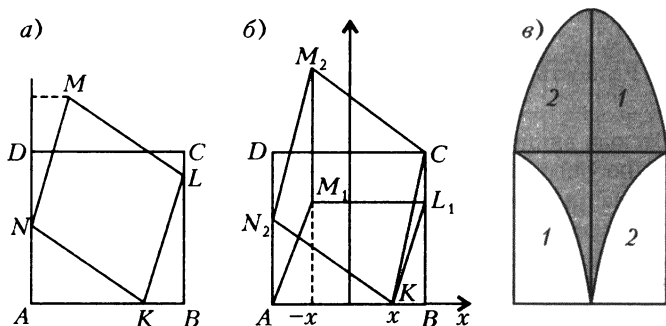


Рис. 34

Пусть K, L, N – вершины ромба на сторонах AB, BC и AD квадрата (рис.34, а). Заметим, что длина KB равна расстоянию от точки M до прямой AD . Поэтому, если зафиксировать точку K , то возможные положения точки M заполняют некоторый отрезок M_1M_2 , параллельный стороне AD .

При этом нижнему положению точки M_1 соответствует случай $N_1 = A$, а верхнему M_2 – случай $L_2 = C$.

Чтобы определить положение точек M_1 и M_2 в зависимости от расположения точки K , введем систему координат, как это сделано на рисунке 34,б.

Несложные вычисления показывают, что если абсцисса точки K равна $x > 0$, то $M_1 = (-x, \sqrt{2x})$, а $M_2 = (-x, \sqrt{1-2x} + 1)$. Пользуясь симметрией множества точек M относительно оси Oy , получаем, что это множество представляет собой фигуру, выделенную на рисунке 34,в. Брать интегралы для вычисления площади не нужно: на рис.34,в фигурки, обозначенные цифрами 1 и 2, равны.

93. Заметим сначала, что число k взаимно просто с 10. В самом деле, существует число, делящееся на k и начинающееся с 1. Обращенное число также делится на k и оканчивается на 1.

Возьмем теперь число, начинающееся с цифр 500 и делящееся на k : $500abc \dots z$ (a, b, c, \dots, z – цифры этого числа). Тогда на k делятся числа:

1) $z \dots cba 005$.

$z \dots cba 00500 \dots 0$

2) Сумма $\frac{500abc \dots z}{z \dots cba 01000 ab \dots z}$.

$z \dots cba 01000 ab \dots z$.

3) Обращенное последнее число $z \dots ba 00010 ab \dots z$.

$$z \dots ba 0100 ab \dots z$$

4) Разность $\frac{z \dots ba 0001 ab \dots z}{9900 \dots 0}.$

Отсюда видно, что 99 делится на k .

▽ Любопытно, что единственный участник, решивший эту задачу на олимпиаде (ленинградец А. Лифшиц), придумал еще более хитроумную неожиданную конструкцию, приводящую к тому же результату.

94. Пусть a_1, a_2, \dots, a_8 — длины сторон восьмиугольника (рис. 35). Из равенства всех его углов сразу вытекает, что его

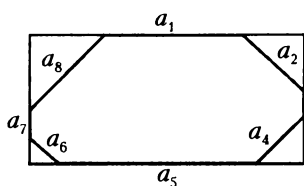


Рис. 35

противоположные стороны параллельны. Продолжив две пары противоположных сторон a_1 и a_5 , a_3 и a_7 , получим прямоугольник, из которого наш восьмиугольник можно изготовить «отрезанием уголков».

Из равенства противоположных сторон этого прямоугольника получим:

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{a_6}{\sqrt{2}} + a_5 + \frac{a_4}{\sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$a_5 - a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_8 + a_2 - a_6 - a_4).$$

Так как a_i — целые числа, а $\sqrt{2}/2$ — иррационально, то $a_5 = a_1$. Точно так же доказывается равенство длин остальных пар противоположных сторон.

95. Ответ: $17^{14} > 31^{11}$. Доказательство получается из очевидных неравенств:

$$17^{14} > 16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}.$$

96. Ответ: 800 или 799.

Одно из направлений линий сетки будем называть горизонтальным, а другое — вертикальным. Окружность диаметра 200, не проходящая через узлы и не касающаяся линий сетки, пересекает 200 горизонтальных прямых и 200 вертикальных, причем каждую из них 2 раза. Таким образом, наибольшее число точек пересечения равно 800. Эти 800 точек делят окружность на 800 частей. Каждая из этих частей лежит внутри одной клетки. Поэтому наибольшее возможное число клеток — 800.

Однако может случиться, что какие-то две части принадлежат одной клетке, т.е. что окружность дважды пересекает какую-

то клетку (рис.36). Докажем, что таких «особых» клеток на более одной.

Посмотрим, где может лежать центр O окружности диаметра 200, пересекающей некоторую сторону AB клетки дважды.

Расстояние от центра O такой окружности до точек A и B больше 100, а от прямой AB – меньше 100, поэтому O лежит вне окружностей радиуса 100 с центрами в точках A и B , между двумя вертикальными линиями сетки, проходящими через A и B и внутри полосы шириной 200 с горизонтальной осью AB . Все такие точки заполняют внутренность двух криволинейных треугольников (один из них заштрихован на рисунке).

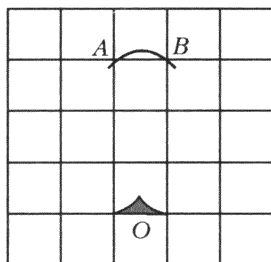


Рис. 36

Очевидно, что для разных отрезков AB такие множества не имеют общих точек, и поэтому существует не более одной особой клетки.

97. Сначала докажем, что можно выбрать группу студентов, в которой каждый язык знают ровно два человека.

Будем обозначать каждого студента набором из начальных букв названий известных ему языков. Так, студент a знает английский, но не знает остальных языков, студент $иф$ знает испанский и французский, но не знает английского; студент $аиф$ знает все три языка.

Пусть $N_a, N_u, N_{\phi}, N_{au}, N_{a\phi}, N_{уф}, N_{аиф}$ – количества студентов каждого типа.

Если $N_{au} \neq 0$, $N_{a\phi} \neq 0$ и $N_{уф} \neq 0$, то выбираем группу $(au, a\phi, уф)$.

Если одно из чисел, скажем N_{au} , равно 0, $N_{a\phi}$ не равно 0, и $N_{уф}$ не равно 0, то тогда $N_a \neq 0$, $N_u \neq 0$ и требуемая группа – $(a\phi, уф, a, u)$.

Если $N_{au} = N_{a\phi} = 0$, $N_{уф} \neq 0$ и $N_{аиф} \neq 0$, то выбираем группу $(аиф, уф, a)$; если $N_{аиф} = 0$, $N_{уф} \geq 2$, то группу $(уф, уф, a, a)$, если же $N_{уф} = 1$, то группу $(уф, a, a, u, \phi)$.

Если $N_{au} = N_{a\phi} = N_{уф} = 0$, то возможен выбор одной из трех групп: $(аиф, аиф)$, (a, u, ϕ, a, u, ϕ) или $(аиф, a, u, \phi)$.

Дальнейшее ясно: выбирая 5 раз по группе, в которой каждый язык знают ровно 2 человека, мы получим первую группу, в которой каждый язык знают 10 человек. Затем выбираем еще одну такую группу и т.д.

В общем случае, если в некоторой группе студентов каждый из трех данных языков знают n человек, то для любого

четного $p < n$ можно выбрать группу, в которой каждый язык знают p человек. (Условие четности p при этом существенно.)

98. Для решения достаточно воспользоваться тождествами

$$\frac{2k}{x^2 - k^2} = \frac{1}{x - k} - \frac{1}{x + k}$$

и

$$\frac{11}{(x - 11 + k)(x + k)} = \frac{1}{x - 11 + k} - \frac{1}{x + k}.$$

99. Ответ: $n = 9$.

Пусть a_n – длина стороны, а D_n и d_n – длины наибольшей и наименьшей диагоналей правильного n -угольника. Для $n = 4$ и $n = 5$ все диагонали равны. Для $n = 6$ и $n = 7$ $D_n - a_n < a_n$. При $n = 8$ (рис.37,а) опустим перпендикуляры BK и DL из концов наименьшей диагонали BD на наибольшую диагональ AE .

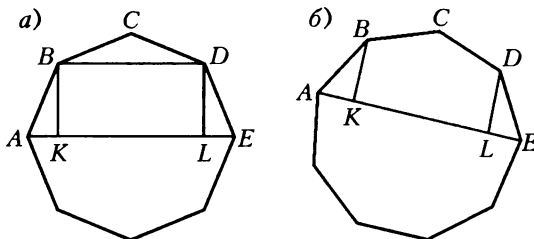


Рис. 37

Легко видеть, что $\angle ABK = 22,5^\circ < 30^\circ$. Поэтому $AB = a_8 > 2AK = D_8 - d_8$. Для $n = 9$ (рис.37,б) аналогично получим $\angle ABK = 30^\circ$, поэтому $AB = a_9 = 2AK = D_9 - d_9$.

Будем далее считать n -угольник вписанным в круг радиуса 1. При $n > 9$, очевидно, $D_n \geq D_9$, $d_n < d_9$, $a_n < a_9$. Поэтому $D_n - d_n > D_9 - d_9 = a_9 > a_n$.

100. Докажем сразу двустороннюю оценку $14 < a_{100} < 18$. При $k > 1$ имеем $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{k-1}^2}$, причем $a_k > 1$. Поэтому $a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3$.

Сложив эти неравенства для всех $1 \leq k \leq n$, получим (с учетом того, что $a_1 = 1$)

$$2n - 1 < a_n^2 < 3n - 2,$$

откуда $\sqrt{2n - 1} < a_n < \sqrt{3n - 2}$. При $n = 100$ получим требуемые неравенства $14 < a_{100} < 18$.

▽ Интересно доказать, что последовательность a_n/\sqrt{n} стремится к пределу, и найти его.

101. Перенесем параллельно $\Delta A'B'C'$ так, чтобы точка O' перешла в точку O . Вершины полученного треугольника будем обозначать, как и раньше, через A' , B' и C' .

Так как $\angle A'OB = \angle A_1OB_1$ и по условию $OA' : OB' = OB_1 : OA_1$, то

$$\Delta A_1OB_1 \sim \Delta B'OA', \text{ и } \angle OA_1B_1 = \angle OB'A' \text{ и } \angle OB_1A_1 = \angle OA'B'.$$

Так как около четырехугольника OA_1CB_1 можно описать окружность с диаметром OC , то $\angle B_1CO = \angle OA_1B$ и $\angle A_1CO = \angle OB_1A_1$. Следовательно, $\Delta A_1OC \sim \Delta C_1OA'$ и $\Delta BOC \sim \Delta C_1OB_1$, откуда следует, что отрезок OC' лежит на прямой OC и $OC \cdot OC' = OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$.

Аналогично рассматриваются треугольники $B'OC'$ и $C'OA'$.

102. Докажем утверждение задачи индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что оно справедливо при $k = n$.

Пусть $a < (n+1)!$. Разделим a на $n+1$ с остатком: $a = d(n+1) + r$, где $d \leq n!$, $r < n+1$.

По предположению индукции $d = d_1 + d_2 + \dots + d_l$, где все d_i — различные делители числа $n!$ и $l \leq n$. Тогда $a = d_1(n+1) + \dots + d_l(n+1) + r$ в этой сумме не больше чем $n+1$ слагаемое, каждое из них — делитель числа $(n+1)!$ и все они различны.

103. Параллельным переносом, переводящим точку D в точку B , переведем треугольник ADE в треугольник KBL , где $KL \parallel AC$ и, кроме того, $KB = LB$ (рис.38).

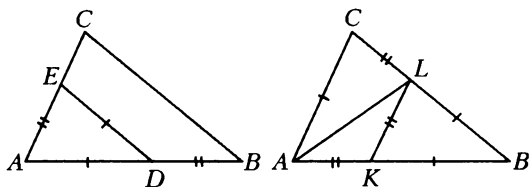


Рис. 38

Если $\angle KAL = \alpha$, то $\angle KLA = \alpha$; $\angle BKL = 2\alpha$; $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$; далее, $\Delta ACL = \Delta BKL$ по двум сторонам и углу между ними; $\angle ALC = \angle KLB = 2\alpha$; $\alpha = \pi/5$ и $LC = AK = BD$, т.е. длина отрезка BD равна длине стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = AC$.

104. Из точки A опустим перпендикуляр AH на плоскость BCD , а из точки H — перпендикуляры HK , HL и HM на прямые

BC , BD , CD . Каждая из пирамид $ABKL$, $ACKM$, $ADML$ покрывается соответствующим шаром.

105. а) Легко видеть, что каждая прямая, параллельная сторонам или диагоналям квадрата, пересекает четное число из восьми заштрихованных клеток на рисунке 39. Поэтому четность числа минусов, стоящих в этих клетках, при указанных операциях не меняется (П13).

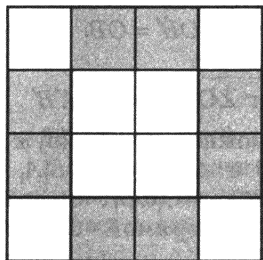


Рис. 39

б) на доске 8×8 можно нарисовать квадрат 4×4 , в котором минус будет расположен так же, как в задаче а), после чего задача сводится к предыдущей.

106. Площади всех шести треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами, равны.

В силу равенства радиусов вписанных окружностей и формулы $S = pr$ следует равенство периметров четырех из таких треугольников.

Так как два из них примыкают к одной стороне, скажем к AB (рис.40), то $AM = MB$, поэтому MK – медиана и высота $\triangle AMB$ и $AC = BC$.

Если равны радиусы кругов, вписанных в треугольники ALM и AKM , то эти треугольники равны (как треугольники с равными площадями, основаниями и периметрами), причем $AL = AK$, т.е. $AC = AB$ и треугольник ABC правильный.

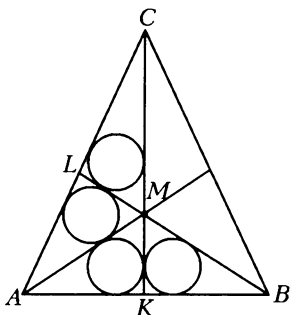


Рис. 40

Если равны периметры треугольников CLM и KMB , то, пользуясь равенством длин отрезков касательной, проведенных из одной точки, получим: $CL + LM + CM = 2 \cdot CL + 2x = 2 \cdot BK + 2x$ (x – расстояние от точки M до точки касания с соответствующей окружностью). Отсюда следует, что $AC = AB$.

107. Доказательство утверждения этой задачи напоминает принадлежащее Евклиду доказательство бесконечности множества простых чисел (П2).

Предположим, что уравнение $x^2 + x + 1 = py$ имеет целочисленные решения (x, y) лишь для конечного числа простых чисел p_1, p_2, \dots, p_m .

Пусть $P = p_1 p_2 \dots p_m$. Тогда число $P^2 + P + 1$ не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_m и, следовательно, имеет простой делитель q , не совпадающий ни с одним из этих чисел. Тем самым, уравнение $x^2 + x + 1 = qu$ имеет целочисленное решение $(P, (P^2 + P + 1)/q)$. Получено противоречие.

∇ Более общая задача разобрана в книге [60] (VIII, зад. 108).

108. Ответ: наибольшее возможное значение c_1 равно 24. Если первое место одному фигуристу присуждено всеми судьями, то $c_1 = 9$. Если первые места присуждены двум фигуристам, то один из них получил не менее 5 первых мест, а остальные четыре полученных им места не выше четвертого, поэтому $c_1 \leq 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 21$.

Если первые места получили 3 фигуриста, то, поскольку остальные из полученных ими мест не выше четвертого, сумма мест всех этих фигуристов не больше $1 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72$. Следовательно, $c_1 \leq 24$. Если спортсменов, получивших первое место, четверо, то их общая сумма мест не больше 90, следовательно, сумма баллов одного из них не больше 22. Случай, когда 5 и более спортсменов получают первое место, невозможен (на них не хватит очков от 1 до 4).

Итак, $c_1 \leq 24$. Покажем, как построить пример с $c_1 = 24$.

Если судьи распределяли очки так: каждый из трех лучших фигуристов получит места 1,1,1, 3,3,3, 4,4, 4, каждый из трех следующих 2,2,2, 5,5, 5, 6,6,6, а остальные – произвольно, то получится распределение, при котором $c_1 = 24$.

109. Для любого m ($1 \leq m \leq n$) среди m пар (a_k, b_k) , $1 \leq k \leq m$, одно из неравенств $a_k \geq b_k$ или $b_k \geq a_k$ выполнено не менее чем для $m/2$ пар.

Пусть, например, $b_k \geq a_k$ не менее чем в $m/2$ парах. Если b_l – наименьшее из этих b_k , то $b_l \leq 2/m$. Поэтому $a_l + b_l \leq 2b_l \leq 4/m$, а поскольку $l \leq m$, то $a_m + b_m \leq a_l + b_l \leq 4/m$.

110. Утверждение задачи можно доказать индукцией по числу учеников n . Но мы приведем другое решение, вытекающее из такого почти очевидного факта: сумма 2^k произведений $x_1 x_2 \dots x_k$, где (x_1, x_2, \dots, x_k) – всевозможные наборы из чисел $+1$ и -1 , равно 0 (для его доказательства достаточно перемножить k равенств $1 + (-1) = 0$ и в левой части провести всеми способами почленное умножение). Будем считать, что ученики имеют номера от 1 до n ; для каждого списка номеров $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ (здесь $k < n$) обозначим через $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ сумму масс гирь, на которых указан именно этот список, причем гири на одной чашке

весов (перевешивающей вначале) берутся со знаком плюс, на другой – со знаком минус. Тогда нужное нам утверждение состоит в следующем: для многочлена вида

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots \\ & \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{123}x_1x_2x_3 + \dots \\ & \dots + a_{n-2,n-1,n}x_{n-2}x_{n-1}x_n + \dots + a_{1,2,\dots,n}x_1x_2\dots x_n, \end{aligned}$$

у которого сумма коэффициентов положительна, всегда найдется набор x_1, x_2, \dots, x_n из чисел $+1$ и -1 такой, что значение $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отрицательно ($f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выражает разность масс на чашках весов, если $x_i = -1$ для тех учеников i , кто переставил свои гири, и $x_i = 1$ для остальных). Остается заметить, что сумма значений $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по всем наборам – даже сумма значений каждого из составляющих его одночленов – равна 0; поскольку $f(1, 1, \dots, 1) > 0$, то должен найтись набор, для которого значение f отрицательно (П9).

111. Ответ: наименьшее число милиционеров равно $(m - 1)(n - 1)$.

Если милиционеры расставлены требуемым в условии образом, то вся сетка улиц распадается на какое-то число k кусков, не содержащих замкнутых маршрутов (циклов), – иначе найдется цикл, по которому можно проехать, не будучи замеченным ни одним из милиционеров. Если оставшийся кусок сетки содержит p перекрестков, то в нем содержится ровно $p - 1$ отрезков улиц (см. задачу 8). Так как перекрестков всего $m \cdot n$, то число отрезков, на которых нет милиционеров, равно $mn - k$. Общее

число отрезков улиц равно $2mn - m - n$. Таким образом, число занятых отрезков равно

$$mn - m - n + k \geq (m - 1)(n - 1).$$

Пример нужной расстановки $(m - 1)(n - 1)$ милиционеров показан на рисунке 41.

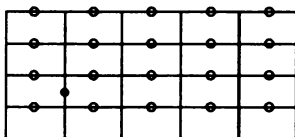


Рис. 41

112. Пусть L – диаметрально противоположная K точка вписанной окружности с центром O , D – середина отрезка AC , E – точка его пересечения с прямой BL . Достаточно доказать, что $ED = DK$ (тогда DO идет по средней линии $\triangle EBK$), т.е. что $AE = KC$.

Заметим, что при гомотетии с центром B , переводящей вписанную в $\triangle ABC$ окружность во внеписанную (касающуюся AC и продолжений сторон BA и BC), точка L переходит в точку E , которая тем самым является точкой касания внеписанной

окружности с AC . Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны по длине, обе суммы $AK + AE$ и $CK + CE$ равны отрезкам прямых BA и BC между точками касания, поэтому

$$AK + AE = CK + CE \text{ и } AE = KC.$$

113. Возведем все равенства $a_1 = 0$; $|a_2| = |a_1 + 1|, \dots, |a_{n+1}| = |a_n + 1|$ в квадрат и сложим. После сокращений получим $a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n \geq 0$, откуда $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq -n/2$.

Другое решение (по индукции) можно получить, заметив, что удаление пары последовательных членов $a_n \geq 0$, $a_{n+1} = -a_n - 1$ со средним $-1/2$ приводит к допустимой последовательности.

∇ Оценка $(-n/2)$ для суммы чисел в этой задаче является точной; в качестве примера годится любой набор, заканчивающийся числом -1 или (при нечетном n) 0 .

114. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ABD = \beta_1$; $\angle DBC = \beta_2$. Применяя теорему синусов к треугольникам AOB и BOC , получим

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BC}{OC} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}.$$

Так как AB и BC рациональны, то достаточно доказать рациональность отношения синусов.

Из теоремы косинусов и рациональности длин сторон и диагоналей следует, что числа $\cos \beta$, $\cos \beta_1$ и $\cos \beta_2$ рациональны. (Например, $\cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$.) Рациональны так-

же числа $\sin \beta_1 \sin \beta_2$ (так как $\cos \beta = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2$), $\sin \beta_2^2 = 1 - \cos^2 \beta_2$, и их отношение $\sin \beta_1 / \sin \beta_2$.

115. На прямой BC выберем точку C_1 такую, что ABC_1E – параллелограмм. Тогда периметры треугольника ABE , BEC_1 и BEC равны. Отсюда следует, что точки C и C_1 совпадают, Поэтому $BC = AE$. Аналогично доказывается, что $BC = ED$.

116. Пусть v – максимальная скорость волка. Проведем через точку, в которой находится волк, две прямые, параллельные диагоналям квадрата. Эти прямые в точках C_1 , C_2 , C_3 , C_4 пересекают контур квадрата.

Так как скорость перемещения каждой из точек C_1 , C_2 , C_3 и C_4 не больше чем $v\sqrt{2} < \frac{3}{2}v$, то собаки смогут в каждый момент находиться в этих четырех точках и, следовательно, не выпускают волка.

117. Пусть $abcd$ – четверка последних цифр. В последовательности обязательно встретятся пятерка $abcd0$ (иначе можно было бы добавить 0 с сохранением свойства а), что противоречит б)) и $abcd1$. Следовательно, четверка $abcd$ встретится в последовательности трижды, а так как ни 0, ни 1 не могут стоять перед $abcd$ более одного раза, то перед одной из этих четверок не стоит никакой цифры.

Для любого n (в частности, и для $n = 5$) можно расположить 2^n цифр 0 и 1 по кругу так, что любое «слово» длины n из 0 и 1 будет встречаться (при обходе против часовой стрелки) ровно один раз. Аналогичный факт верен и в алфавите из любого количества $k \geq 2$ букв (тогда слов длины n будет k^n).

118. Перемножив первое и второе неравенства, получим $(a+b)^2 < ab+cd$, но $(a+b)^2 \geq 4ab$ и, следовательно, $ab+cd \geq 4ab$, т.е. $cd \geq 3ab$.

Перемножив второе и третье неравенства, получаем $ab(ab+cd) > (a+b)^2 cd \geq 4abcd$, откуда $ab+cd > 4cd$, т.е. $ab > 3cd$.

Итак, одновременно $ab > 3cd$ и $cd > 3ab$, что невозможно.

119. Ответ: $a = 5$.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где $0 < x_1 < 1$ и $0 < x_2 < 1$, числа a, b, c целые, $a > 0$.

Тогда $f(0)$ и $f(1)$ – целые положительные числа, поэтому $f(0) \cdot f(1) \geq 1$, т.е. $a^2 x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geq 1$.

Заметим теперь, что всегда $x(1-x) \leq 1/4$, причем равенство возможно только при $x = 1/2$. Поскольку числа x_1 и x_2 различны, а $x_1(1-x_1)$ и $x_2(1-x_2)$ положительные, то $x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) < 1/16$.

Следовательно, $a^2 > 16$, т.е. $a > 4$.

При $a = 5$ получаем квадратное уравнение $5x^2 - 5x + 1 = 0$, которое имеет два различных корня, принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

120. Утверждение задачи можно доказать по индукции. При $n = 1$ оно справедливо: $\frac{1}{1 \cdot 1} = 1$. При переходе от $n - 1$ к n мы должны выбросить все дроби $\frac{1}{pq}$, для которых $p < q, p + q = n$, p и q взаимно просты, и добавить все дроби вида $\frac{1}{pn}$, где $p < n$, p и n взаимно просты.

Пусть $\frac{1}{pq}$ – одна из выброшенных дробей.

Так как

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p(n-p)} = \frac{1}{pn} + \frac{1}{(n-p)n},$$

то ее удаление из суммы компенсируется появлением двух новых дробей $\frac{1}{pn}$ и $\frac{1}{(n-p)n}$, которые удовлетворяют условиям задачи.

Таким образом, при переходе от $n-1$ к n сумма не меняется.

121. Выберем из нашей системы точек две, расстояние между которыми наибольшее: пусть, например, это точки A и B .

Докажем, что каждый из углов XAY (и XBY), где X и Y — какие-то из данных точек, меньше 120° . В самом деле, так как в треугольниках AXB и AYB сторона AB наибольшая, то $\angle AXB > 120^\circ$ и $\angle AYB > 120^\circ$. Поэтому $\angle XAB < 60^\circ$ и $\angle YAB < 60^\circ$, а так как плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух остальных плоских углов, то $\angle XAY + \angle XAB + \angle YAB < 120^\circ$.

Таким образом, нумерация должна начинаться с точки A и заканчиваться на точке B . Заметим, что все расстояния от точек нашей системы до точки A различны. В самом деле, если $AX = AY$, то треугольник AXY равнобедренный и $\angle XAY > 120^\circ$, что, как мы видели, невозможно. Занумеруем данные точки, положив $A_1 = A$, A_2 — ближайшая к A точка системы, A_3 — ближайшая к A из остальных точек, ..., A_k — ближайшая из точек, не получивших еще номера, ..., $A_n = B$. Докажем, что такая нумерация удовлетворяет условию задачи.

Поскольку $\angle A_1 A_i A_k > 120^\circ$ при $1 < i < k \leq n$, то достаточно доказать, что $\angle A_i A_j A_k > 120^\circ$ при $1 < i < j < k < n$.

Так как в системе A_1, A_2, \dots, A_k точки A_1 и A_k наиболее далекие, то $\angle A_1 A_k A_j < 120^\circ$, как мы убедились в начале решения.

Докажем, что $\angle A_k A_i A_j < 120^\circ$. В самом деле, так как $\angle A_1 A_i A_j > 120^\circ$ и $\angle A_1 A_i A_k > 120^\circ$, то из неравенства $\angle A_k A_i A_j \leq 120^\circ$ вытекало бы, что сумма плоских углов трехгранного угла с вершиной A_i больше 360° .

Итак, $\angle A_i A_j A_k > 120^\circ$ при любых $1 \leq i < j < k \leq n$. Утверждение доказано.

▽ По существу в этой задаче установлено, что отношение $\angle A_i A_j A_k > 120^\circ$ обладает теми же свойствами, что и отношение « A_j лежит между A_i и A_k » для точек на прямой, т.е. что это отношение позволяет навести «порядок» в данном множестве. Величину 120° здесь нельзя заменить меньшей.

122. Ответ: 108, 135, 180, 117.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – искомые числа, S – их сумма, a – первая цифра каждого из них. Ясно, что $100a \leq x_i < 100(a+1)$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Пользуясь этими неравенствами, получим $x_i + 300a \leq S < x_i + 300(a+1)$, откуда

$$1 + \frac{300a}{x_i} \leq \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{300(a+1)}{x_i},$$

следовательно,

$$1 + \frac{3a}{a+1} < \frac{S}{x_i} < 4 + \frac{3}{a}.$$

При $a = 1$ получим неравенства $2,5 < S/x_i < 7$, а при $a \geq 2$: $3 < S/x_i < 5,5$. Остается сделать перебор.

Поскольку три из четырех частных S/x_i – целые и различные числа, то случай $a \geq 2$ невозможен (между 3 и 5,5 – лишь два целых числа). Поэтому $a = 1$ и целые частные следует искать среди чисел 3, 4, 5 и 6. Но 3 и 6 не могут одновременно быть частными, так как отношение любых двух трехзначных чисел от 100 до 199 меньше двух. Остались две возможности: 1) три частных 3, 4, 5 и 2) три частных 6, 5, 4. В обоих случаях S делится на 60: $S = 60k$. В первом случае искомые числа: $12k, 15k, 20k$ и $13k$.

Первая цифра одинакова у всех чисел только при $k = 9$, что и дает ответ. Во втором случае набор чисел $10k, 12k, 15k$ и $23k$ не удовлетворяет условию задачи ни при каком k , так как отношение чисел $23k$ и $10k$ больше двух.

123. Ответ: 10 городов.

Из любого города A можно добраться не более чем до трех городов, а из каждого из них не более чем до двух (не считая A).

Таким образом, всего городов не более $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$.

Пример на рисунке 42 показывает, что нужная система авиалиний в государстве с десятью городами существует.

▽ Граф на рисунке 42 часто используется в качестве примера и даже имеет специальное название «граф Петерсена».

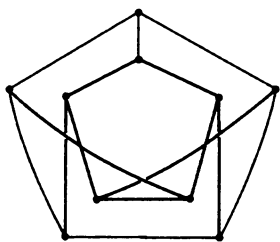


Рис. 42

124. а) Если K – середина наибольшей диагонали AD выпуклого пятиугольника $ABCDE$, длины всех сторон которого равны a , то $\angle AKE = \angle EKD = 90^\circ$. Поскольку $AC \leq AD$, то $\angle BAC < \angle DAE$; тем более $\angle BAK > \angle KAE$. Из этого следует, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой EK . Так же

доказывается, что точки C и D тоже лежат по одну сторону от прямой EK . Отсюда сразу получается, что $\angle BKA < 90^\circ$ и $\angle CKD < 90^\circ$.

Предположим, что $\angle BKC \geq 90^\circ$, тогда $BK < a$ и $CK < a$, а так как $AK < a$ и $KD < a$, то $\angle AKB > 60^\circ$ и $\angle CKD > 60^\circ$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол); но это невозможно, ибо $\angle AKB + \angle BKC + \angle CKD = 180^\circ$. Следовательно, $\angle BKC < 90^\circ$.

Мы доказали, что точка K удовлетворяет условию задачи.

б) Если на продолжении отрезка EK взять точку M , очень близкую к точке K , то все углы AMB , BMC , CMD , DME и EMA будут острыми. Поэтому точка M не может принадлежать ни одному из полукругов, построенных на сторонах пятиугольника как на диаметрах.

125. Если первый игрок поставит -1 перед x в первой степени, а при втором своем ходе он поставит на последнее оставшееся место число, противоположное тому, которое поставил второй, то получится многочлен вида $x^3 - ax^2 - x + a = (x^2 - 1)(x - a)$. Корни этого многочлена -1 , 1 , a — целые числа.

126. Ответ: 90 игр.

Пусть среди любых трех команд найдутся две, уже сыгравшие между собой. Выберем команду A , которая провела наименьшее количество игр — k . Каждая из k команд, уже сыгравших с A , как и сама команда A , провела не менее k игр. Из $(19 - k)$ команд, не сыгравших с A , каждая сыграла со всеми остальными $(18 - k)$ из них — иначе нашлась бы тройка команд, среди которых никакие не играли между собой. Таким образом, удвоенное число всех игр — его можно получить, сложив количества игр, сыгранных всеми командами, — не меньше

$$k^2 + k + (19 - k)(18 - k) = 2k^2 - 36k + 18 \cdot 19 = 2(k - 9)^2 + 180 \geq 180.$$

Пример ситуации, когда сыграно 90 игр и удовлетворяются условия задачи, дают две группы по 10 команд, в каждой из которых все команды друг с другом сыграли, но ни одна не играла с командой другой группы.

▽ Если изобразить команды точками, а не сыгравшие друг с другом команды соединить отрезком, то получится граф, который при соблюдении условия задачи будет графом без треугольников. Можно доказать, что в таком графе с n вершинами максимум $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ребер.

Рассуждение, проведенное в решении, похоже на доказательство «леммы о кресте» в решении 156 и оценки в 246, в).

127. Неравенство задачи равносильно соотношениям

$$(n+1) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1,$$

или

$$n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{\pi}{n} \right) > 1 - \cos \frac{\pi}{n+1},$$

т.е.

$$n \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} \cdot \sin \frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Последнее неравенство справедливо, так как

$$\sin \frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin \frac{2\pi n}{2n(n+1)} = \sin \frac{\pi}{n+1} > \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$$

и

$$n \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} \geq \sin \frac{n\pi}{2n(n+1)} = \sin \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(здесь мы воспользовались неравенством $n|\sin \alpha| \geq |\sin n\alpha|$, которое легко доказывается по индукции).

128. Пусть $a_{i_1} = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$. Выберем a_{i_2} – наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем a_{i_1} , a_{i_3} – наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем a_{i_2} и вообще a_{i_k} – наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем $a_{i_{k-1}}$.

Ясно, что в конце концов мы придем к $a_{i_1} : a_{i_{r+1}} = a_{i_1}$.

Если номера $1, 2, \dots, n$ расположить по кругу, то i_{k+1} и i_k (а также i_r и i_1) будут стоять рядом или через одно; значит, $r \geq n/2$.

Данная сумма больше чем

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \dots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}} \right) = \frac{1}{2} S.$$

Поскольку среднее арифметическое не меньше среднего геометрического (П8), то

$$\frac{S}{r} \geq \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \cdot \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} = 1,$$

т.е. S не меньше r . Поэтому данная сумма больше $n/4$.

∇ Может показаться, что всегда верно более сильное неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (*)$$

(такую гипотезу выдвинул в 1954 г. американский математик

Шапиро). В самом деле, это было постепенно доказано для нечетных $n \leq 11$ и четных $n \leq 12$, но уже для четных $n \geq 14$ и нечетных $n \geq 27$ неверно (сначала контрпримеры были придуманы для больших n). Точная оценка $\gamma_n \cdot \frac{n}{2}$, которую нужно поставить в (*) вместо $\frac{n}{2}$, для каждого n неизвестна, но В.Г.Дринфельду – одному из победителей олимпиады, продолжавшему заниматься этой задачей, – удалось получить в том же 1969 г. замечательный результат¹: он нашел наилучшую оценку $\gamma \cdot \frac{n}{2}$, пригодную сразу для всех n . Это число $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ – ордината точки, в которой общая касательная к графикам функций $y = e^{-x}$ и $y = \frac{2}{e^{x/2} + e^x}$ пересекает ось Oy ; $\gamma \approx 0,989$.

129. Предположим, что задача решена. Так как прямая CY перпендикулярна прямой AX , то $CY \parallel BX$. Пусть K – точка пересечения отрезков AB и XY . Ясно, что $\triangle KBX = \triangle CKY$. Поэтому $CK = KB$.

Для построения достаточно провести через середину отрезка CB перпендикуляр к прямой AB , пересекающей окружность в точках X и Y .

130. Пусть $x, y, \frac{1}{xy}$ – эти числа. Если $x + y + \frac{1}{xy} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$, то после преобразований получим $(x-1)(y-1)\left(\frac{1}{xy} - 1\right)$, откуда видно, что положительным должен быть ровно один из сомножителей.

131. Ответ: не более двух. Пример многоугольника, у которого две стороны равны наибольшей диагонали, см. на рисунке 43.

Предположим, что таких сторон больше двух. Выберем две из них AB и CD , не имеющие общих вершин (это возможно, поскольку многоугольник, имеющий диагонали, не является треугольником). Тогда хотя бы одна из диагоналей AC или BD длиннее стороны AB : если эти диагонали пересекаются в некоторой точ-

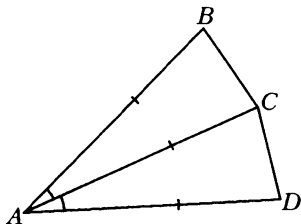


Рис. 43

¹ Дринфельд В.Г. Об одном циклическом неравенстве // Мат. Записки. – 1971. – Т. 9, №2.

ке K , то

$$AC + BD = AK + KC + BK + KD > AB + CD = 2AB.$$

132. Предположим противное. Запишем два числа одно под другим и будем складывать их столбиком. Так как последняя цифра суммы нечетная, то при сложении первых цифр также получится нечетная сумма. Поэтому в этот разряд из предыдущего при сложении не переходит единица. Это означает, что сумма цифр во втором, а следовательно, и в предпоследнем столбце меньше 10. Заметим, что из второго столбика в третий разряд также не переходит единица, — это могло быть, лишь если сумма цифр второго разряда была бы равна 9, а сумма цифр первого разряда — больше 10, но тогда во втором разряде суммы стоял бы 0.

Отбросив теперь у данного числа две последние и две первые цифры и проводя те же рассуждения для получившихся 13-значных, затем 9-значных и, наконец, 5-значных чисел, получим, что в средний разряд суммы из предыдущего не может перейти единица, а так как цифры, стоящие в средних разрядах, одинаковые, то средняя цифра суммы окажется четной.

Как видно из решения, утверждение задачи верно для $(4k + 1)$ -значных чисел. Простые примеры $(12 + 21, 506 + 605, \dots)$ показывают, что для чисел с другим числом знаков оно неверно.

133. Раскрасим треугольники в два цвета, как показано на рисунке 44, а.

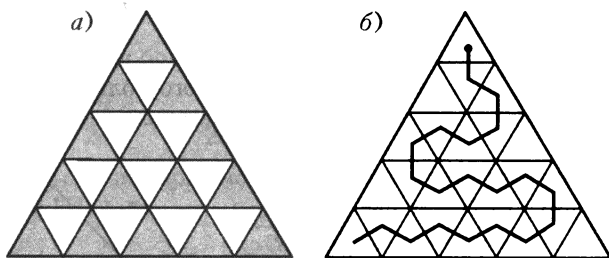


Рис. 44

Черных треугольников получилось на k больше, чем белых. Поэтому всего белых треугольников $\frac{1}{2}(k^2 - k)$, а черных $\frac{1}{2}(k^2 + k)$. В цепочке цвета треугольников чередуются. Поэтому черных треугольников в цепочке не больше чем $\frac{1}{2}(k^2 - k) + 1$.

Всего же треугольников в ней не больше чем

$$\frac{1}{2}(k^2 - k) + \frac{1}{2}(k^2 - k) + 1 = k^2 - k + 1.$$

Пример цепочки, в которой число треугольников в точности равно $k^2 - k + 1$, показан на рисунке 44,б.

134. Пусть $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ — длины данных отрезков. Предположим, что ни из каких трех из этих отрезков нельзя составить остроугольный треугольник. Тогда, так как в неостроугольном треугольнике квадрат длины наибольшей стороны больше или равен сумме квадратов длин других сторон, справедливые неравенства $c^2 \geq a^2 + b^2$, $d^2 \geq c^2 + b^2$, $e^2 \geq d^2 + c^2$.

Сложив их, получим $e^2 \geq a^2 + 2b^2 + c^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$, откуда $e \geq a + b$, т.е. из отрезков длины e , a и b нельзя составить треугольник.

135. Первое решение. Предположим, что $\angle BAC < 45^\circ$. Тогда $\angle ACH > 45^\circ$, $\angle BCH < 45^\circ$, $\angle CBA > 45^\circ$, $BC < AC$ и, следовательно, медиана CP лежит внутри треугольника ACH и пересекается с медианой BM в точке K , принадлежащей отрезку OM (O — точка пересечения BM , AD и CH). Отсюда, используя равенство $PK = KC/2$, получаем $OH : OC < 1/2$; но по свойству биссектрисы угла треугольника $OH : OC = AH : AC$, т.е. $AH < AC/2$, поэтому $\angle ACH < 30^\circ$. Противоречие.

Второе решение. Докажем, что если $\angle BAC < 45^\circ$, то $\angle ACB < 90^\circ$. На прямой AB возьмем точку B_1 такую, что $HB_1 = AH$. Биссектриса B_1F угла AB_1C пройдет через точку O . (В этой точке уже пересекаются две биссектрисы углов треугольника AB_1C .) По свойству биссектрисы $AF : FC = AB_1 : B_1C$, но $AB_1 : B_1C > 1$, так как $\angle B_1AC < 45^\circ$. Поэтому точка B_1 лежит между точками A и B , и следовательно, $\angle BCA > \angle B_1CA > 90^\circ$.

136. Рассмотрим всевозможные пары цифр, стоящих в разных числах в одном разряде. Поскольку пар чисел 10, то всего таких пар цифр будет $10n$. При этом пар разных цифр, т.е. пар $(1, 2)$ в каждом разряде не меньше 4 и не больше 6, так что среди $10n$ выбранных пар общее количество пар $(1, 2)$ заключено между $4n$ и $6n$.

С другой стороны, так как каждые два числа совпадают в m разрядах, то каждая пара чисел дает $n - m$ пар $(1, 2)$. Поэтому общее число таких пар $10(n - m)$. Итак, $4n \leq 10(n - m) \leq 6n$, откуда $2/5 \leq m/n \leq 3/5$.

137. Мы докажем, что из любых 199 (целых) чисел можно выбрать 100, сумма которых делится на 100. При этом понадобятся лишь такие факты: из любых 3 чисел можно выбрать 2

одинаковой четности (это очевидно); из любых 9 чисел можно выбрать 5, сумма которых делится на 5.

Обозначим через P_m следующее общее утверждение: из любых $2m - 1$ целых чисел можно выбрать m чисел, сумма которых делится на m (другими словами, можно выбрать m чисел, среднее арифметическое которых — целое число). Наше доказательство основано на такой лемме.

Лемма 1. *Если верны утверждения P_k и P_m , то верно и P_{km} .*

Докажем это. Пусть дано $2km - 1$ чисел. Выберем из них, согласно P_m , группу из m чисел с целым средним арифметическим, из оставшихся $2km - m - 1$ — еще одну такую группу, из оставшихся $2km - 2m - 1$ — еще одну и т.д. $2k - 1$ раз, после чего останется $2km - (2k - 1)m - 1 = m - 1$ число, так что $2k - 1$ раз мы действительно могли использовать P_m . Рассмотрим (целые) средние арифметические чисел в $2k - 1$ в выбранных группах. Из них согласно P_k можно выбрать k чисел, сумма которых делится на k . Тогда сумма km исходных чисел, входящих в соответствующие k групп, очевидно, делится на km . Лемма 1 доказана.

Поскольку $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, то из P_2 и P_5 трехкратным применением леммы 1 мы можем вывести P_{100} . Осталось лишь проверить P_5 .

Сделать это можно сравнительно простым перебором всех возможных наборов $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_9 \leq 4$ из 9 остатков при делении на 5, которые могут давать данные 9 чисел. Случаи, когда среди r_i ($1 \leq i \leq 9$) есть 5 одинаковых или когда среди них нет трех одинаковых (и, следовательно, встречаются все остатки 1, 2, 3, 4 и 0), очевидны. Остается рассмотреть случай, когда некоторый остаток r встречается среди r_i либо 3, либо 4 раза. При этом можно считать, что $r = 0$; в противном случае можно добавить ко всем 9 числам $5 - r$ (условие «сумма 5 чисел делится на 5» при таком добавлении сохраняется). Дальше можно избавиться от перебора, вспомнив такую полезную лемму.

Лемма 2. *Из любых q целых чисел можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на q .*

(Чтобы доказать лемму для чисел a_1, a_2, \dots, a_q , достаточно рассмотреть q чисел $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_q$: либо они дают все различные остатки при делении на q , либо среди них есть два, дающих одинаковые остатки, тогда их разность делится на q .)

По лемме 2 из 5 ненулевых остатков n можно выбрать несколько (от 2 до 5), сумма которых делится на 5, и добавить к ним недостающее до 5 количество нулевых.

∇ Можно доказать, что утверждение P_n верно для любого натурального n (по лемме 1 достаточно доказать это для простого n ; элементарное, хотя и не простое доказательство см. в журнале «Квант» (1971, № 7–8, решение задачи М45)). Интересно выяснить следующий вопрос: для какого наименьшего натурального числа $F_d(n)$ из любых $F_d(n)$ векторов с целочисленными координатами можно выбрать несколько векторов, у суммы которых все координаты делятся на n ? (Здесь n – натуральное, d – «размерность»: $d = 2$ для векторов на плоскости, $d = 3$ – в пространстве.)

138. Первое решение. Пусть P – точка касания вписанной окружности со стороной BC , PQ – диаметр вписанной окружности. В решении задачи 112 было доказано, что $AQ \parallel MO$, поэтому $AEOQ$ – параллелограмм, так что $OQ = AE = r$.

Второе решение. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника, противолежащих вершинам A, B, C соответственно. Можно считать, что $b > c$. Опустим из точки O перпендикуляр OP на BC . Тогда

$$MC = \frac{a}{2}; \quad PC = \frac{a+b-c}{2}; \quad HC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

$$\frac{EH}{OP} = \frac{HM}{PM} = \frac{HC-MC}{PC-MC} = \frac{2HC-a}{b-c} = \frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)} = \frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{EH}{r} = \frac{a+b+c}{a} - \frac{b+c}{a} = 1,$$

откуда $AE = r$.

139. Если запись числа k имеет вид $k = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ и t – число из $m > n$ девяток: $t = \underbrace{99 \dots 9}_m = 10^m - 1$, то

$$kt = a_n a_{n-1} \dots (a_0 - 1) \underbrace{99 \dots 9 (9 - a_n) (9 - a_{n-1}) \dots (9 - a_1) (10 - a_0)}_{m \text{ цифр}}.$$

Сумма цифр kt та же, что и у t : она равна $9m$.

140. Пусть a и b – длины сторон каждого прямоугольника. Если контуры прямоугольников пересекаются в восьми точках, то на каждой стороне любого из них лежит ровно две точки пересечения с соседними сторонами другого. Если на какой-то стороне окажется меньше двух точек пересечения, то всего будет меньше восьми таких точек. Поэтому никакая сторона одного прямоугольника не может пересечь двух параллельных сторон другого.

Пусть теперь A и C – точки, в которых пересекаются стороны длины a ; B и D – точки, в которых пересекаются сторона длины

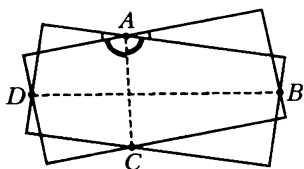


Рис. 45

b (рис.45). Отрезки AC и BD , как легко видеть, служат биссектрисами углов, образованных сторонами, проходящими через точки A , C и соответственно B , D ; следовательно, $AC \perp BD$. Площадь S четырехугольника $ABCD$ равна $AC \cdot BD$, а поскольку $AC \geq b$, $BD \geq a$, то $S \geq ab/2$.

141. Мы докажем, что любое такое число делится на 11111 и, следовательно, степенью двойки не является. Для этого заметим, что 10^5 при делении на 11111 дает в остатке $1: 10^5 = 9 \cdot 11111 + 1$. Поэтому любое из полученных чисел дает при делении на 11111 тот же остаток, что и сумма всех чисел на карточках.

Нетрудно показать также, что любое такое число делится на 9. Но эта сумма, как легко видеть, равна $\frac{11111 + 99999}{2}(10^5 - 1)$, т.е. делится на 11111.

142. Пусть D_1 — множество из 10 цифр $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$; $A_1 = \{0, 2, \dots, 8\}$ — множество четных, $B_1 = \{1, 3, 9\}$ — множество нечетных цифр. Вообще при любом n обозначим через D_n множество всех не более чем n -значных чисел, A_n и B_n — его подмножества из чисел с четной и нечетной суммой цифр ($D_n = A_n \cup B_n$). Заметим, что B_n и A_n всего содержат, считая число из одних нулей, по $5 \cdot 10^{n-1}$ элементов. Сумму всех элементов x множества X будем коротко записывать: $\sum_{x \in X} x$. Мы должны доказать, что $\sum_{a \in A_n} a^k$ равна $\sum_{b \in B_n} b^k$; эту сумму мы обозначим $S_n^{(k)}$.

При $n = 2$, $k = 1$ утверждение задачи сводится к очевидному равенству (где $a \in A_1$, $p \in A_1$, $b \in B_1$, $q \in B_1$):

$$\sum (10a + p) + \sum (10b + q) = \sum (10a + q) + \sum (10b + p);$$

обе части равны $5(\sum 10d + \sum r)$ по всем $d_1 \in D_1$, $r \in D_1$, $S_2^{(1)} = 5(10 + 1)(1 + 2 + \dots + 9)$, так как каждая цифра a , p , b , q входит в ту и другую сумму по 5 раз (а слева — в паре с пятью p и т.п.).

Дальнейшие выкладки проиллюстрируем сначала на примере $n = 3$. Найдем сумму по всем $a \in A_1$, $p \in A_2$, $b \in B_1$, $q \in B_2$ (ниже $d \in D_1$, $r \in D_2$):

$$\sum (10a + p)^2 + \sum (10b + q)^2 = 50 \cdot 10^2 (\sum a^2 + \sum b^2) +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot 10 (\sum a \cdot p + \sum b \cdot q) + 5 \sum p^2 + 5 \sum q^2 = \\
& = 10^2 \sum d^2 + 2 \cdot 10 (\sum a \cdot \sum p + \sum b \cdot \sum q) + 5 \sum r^2 = \\
& = 5 \cdot 10^3 \sum d^2 + 20 \sum d S_2^{(1)} + 5 \sum r^2.
\end{aligned}$$

Ясно, что точно так же преобразуется и сумма $\sum (10a + q)^2 + \sum (10b + p)^2$. Здесь мы использовали тождества $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ и $\sum uv = \sum u \cdot \sum v$ (сумма по всем $u \in U, v \in V$):

Теперь докажем общее утверждение индукцией по n . При этом мы будем использовать формулы

$$\begin{aligned}
(x + y)^k &= x^k + C_k^1 x^{k-1} y + C_k^2 x^{k-2} y^2 + \dots + C_k^{k-1} x y^{k-1} + y^k = \\
&= x^k + \sum C_k^j x^{k-j} y^j + y^k
\end{aligned}$$

(значения «биномиальных коэффициентов» $C_k^j, 1 \leq j \leq k-1$, не играют роли в нашем рассуждении) и $\sum uv = \sum u \sum v$. Предположим, что для n -значных чисел и любого $1 \leq k < n$ нужное равенство доказано: $\sum p^j = \sum q^j = S_n^{(j)}$ (где $p \in A_n, q \in B_n$). Преобразуем сумму k -х степеней чисел из $A_{n+1}, k < n+1$ (ниже мы суммируем по $a \in A_1, p \in A_n, b \in B_1, q \in B_n, d \in D_1, r \in D_n, 1 \leq j \leq k-1$):

$$\begin{aligned}
\sum (10a + p)^k + \sum (10b + q)^k &= 5 \cdot 10^{n-1} \cdot 10^k (\sum a^k + \sum b^k) + \\
&+ \sum C_k^j \cdot 10^{k-j} (\sum a^{k-j} p^j + \sum b^{k-j} q^j) + 5 (\sum p^k + \sum q^k) = \\
&= 5 \cdot 10^{n+k-1} \sum d^k + \sum_j C_k^j \cdot 10^{k-j} S_k^{(j)} \sum d^{k-j} + 5 \sum r^k.
\end{aligned}$$

Ясно, что сумма k -х степеней чисел из B_{n+1} равна тому же выражению (нужно лишь поменять местами буквы p и q).

▽ Аналогичные тождества верны и в любой d -ичной системе счисления при четном d , например в двоичной, где для небольших n его легко проверить непосредственно.

143. Назовем систему единичных векторов e_1, e_2, \dots, e_m (с общим началом O) симметричной, если при повороте на угол $2\pi k/m$ (при некотором $k < m$) она переходит в себя. Сумма

векторов такой системы очевидно равна 0, так как она не меняется при повороте на угол $2\pi k/m < 2\pi$.

В частности, симметричную систему образуют векторы, идущие в последовательные вершины правильного m -угольника: для них $k = 1$.

Подвергнем все единичные векторы с началом O преобразованию $\mathbf{e} \rightarrow D^l \mathbf{e}$ (l -кратному закручиванию): увеличим угол от начального направления Ox до \mathbf{e} в l раз; полученный вектор и примем за $D^l \mathbf{e}$. При таком преобразовании D^l симметричная система векторов перейдет в симметричную, если только kl не делится на m (угол $2\pi kl/m$ между соседними векторами \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_{i+1} увеличится в l раз; вычитая из $2\pi kl/m$ кратный 2π угол, получим, что угол между $D^l \mathbf{e}_i$ и $D^l \mathbf{e}_{i+1}$ равен $2\pi r/m$, где r — остаток от деления kl на m). Если же kl делится на m (в частности, при $k = m$), то все векторы $D^l \mathbf{e}_i$ сольются в один.

После этих замечаний перейдем к решению задачи. Предположим, что вершины n -угольника удалось раскрасить несколькими красками, так что вершины одного цвета образуют правильные многоугольники: l -угольник, q_1 -угольник, q_2 -угольник, ..., q_s -угольник, где $l < q_1 < q_2 < \dots < q_s$. Симметричную систему векторов, проведенных в вершины n -угольника, мы можем тем самым разбить на $s + 1$ симметричных систем из l_i векторов. Пока никакого противоречия нет: сумма каждой из них равна $\mathbf{0}$, и общая сумма — тоже. Но стоит подвергнуть все наши векторы l -кратному закручиванию, как противоречие возникнет: все l векторов первой системы сольются в один, так что их сумма станет отличной от $\mathbf{0}$, а остальные системы — из q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) векторов и из всех n векторов — останутся правильными, поскольку углы между соседними векторами в них $2\pi l/q_1 < 2\pi$, $2\pi l/q_2 < 2\pi$, ..., $2\pi l/n < 2\pi$, так что сумма в них останется равной $\mathbf{0}$.

▽ Это замечательное решение придумал А.Лифшиц; на этой олимпиаде он, правда, был уже членом жюри, а никому из школьников решить задачу не удалось.

Идея « l -кратного закручивания» векторов становится более прозрачной, если рассматривать векторы как комплексные числа; преобразование D^l — это просто возвышение в степень $z \rightarrow z^l$ комплексных чисел z с $|z| = 1$; симметричная система векторов — это геометрическая прогрессия \mathbf{u} , $\mathbf{u}\epsilon$, $\mathbf{u}\epsilon^2$, ..., $\mathbf{u}\epsilon^m$, где $|\mathbf{u}| = 1$ и ϵ — некоторый корень m -й степени из 1, $\epsilon \neq 1$; если аргумент числа ϵ — угол между соседними векторами системы — равен $2\pi k/m$, то такая система, как можно показать, состоит из векторов, идущих в вершины правильного m/d -угольника, где d

– некоторый делитель m , $d < m$, причем в каждую вершину идет d векторов.

Решение этой задачи показывает, что любое разбиение множества целых чисел \mathbf{Z} на несколько непересекающихся (бесконечных в обе стороны) арифметических прогрессий получается только таким способом: \mathbf{Z} разбивается на d прогрессий с одной и той же разностью d , затем, быть может, одна (или несколько) из них разбивается на прогрессии с одинаковой разностью и т.д. Применение в теоретико-числовых задачах комплексных чисел, подобное описанному в нашем решении, называется «методом тригонометрических сумм».

144. Это можно доказать по индукции. При $n = 1$ следует взять число 2. Если $A = 2^n \cdot B - n$ -значное число, делящееся на 2^n , то одно из чисел $2 \cdot 10^n + A$ или $1 \cdot 10^n + A$ делится на 2^{n+1} , потому что одно из чисел $5^n + B$ или $2 \cdot 5^n + B$ четно.

∇ Искомое число для каждого n ровно одно; более того, все n -значные числа, составленные из цифр 1 и 2, дают разные остатки при делении на n . Пользуясь этим, можно получить другое решение задачи.

145. Задача а) следует из б), так что мы приведем лишь решение этой более общей задачи.

Точки B_k и D_k одинаково удалены от прямой OA_k . Поэтому $S_{OA_k B_k} = S_{OA_k D_k}$. Перемножив n равенств и записав каждую площадь как произведение основания $A_k B_k$ или $A_k D_k$ на половину соответствующей высоты (расстояния от O до стороны многоугольника), получим требуемое равенство: длины высот в произведении сократятся.

∇ В условиях задачи а) силы $\overline{A_k C_k}$, приложенные в точках A_k к твердой пластине $A_1 A_2 A_3$, взаимно уравновешиваются – пластина будет неподвижна; равны нулю сумма сил (как векторов) и сумма их моментов, поскольку момент каждой из этих сил относительно точки O равен нулю.

Для треугольника равенство произведений, выписанное в условии, является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы прямые $A_k C_k$ пересекались в одной точке O .

146. а) Ответ: 11 вопросов. Узнав все 10 чисел в одной строке и одно – в другой, легко восстановить и все остальные числа. Если же задать лишь 10 вопросов, то однозначно восстановить числа нельзя; с одной стороны, в каждом столбце нужно знать хотя бы одно число – иначе можно прибавлять к обоим числам в этом столбце произвольное число x , сохраняя нужное свойство таблицы; с другой стороны, хотя бы в одном столбце надо узнать

оба числа – иначе можно взять произвольное число y как разность между числами в каждом столбце и по имеющимся данным построить таблицу.

6) Доказательство можно провести индукцией. Будем считать, что $n \geq m$, и вести индукцию по $m + n$. Если в одном из n столбцов неизвестно ни одно из чисел, то, очевидно, числа восстанавливаются неоднозначно. Если же в каждом из n столбцов есть известные числа, то (поскольку общее число $m + n - 2$ известных чисел не больше $2n - 2$) найдется столбец, где известно лишь одно число, а оставшаяся после вычеркивания этого столбца таблица $(n - 1)m$ содержит лишь $m + (n - 1) - 2$ известных числа и по предположению индукции восстанавливается неоднозначно.

∇ Оценка в этой задаче точна: таблицу вида

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2, & \dots & x_n & & & \\ x_1 + y_1, & x_2 + y_1, & \dots & x_n + y_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_1 + y_{m-1}, & x_2 + y_{m-1}, & \dots & x_n + y_{m-1} & & & \end{array} \quad (*)$$

можно восстановить по $m + n - 1$ числам первой строки и первого столбца.

Ответ на более тонкий вопрос – какие именно наборы Γ чисел таблицы $m \times n$ для этого подходят – можно сформулировать на языке теории графов (ПН).

Рассмотрим «двудольный граф» Γ с $m + n$ вершинами A_1, \dots, A_m и B_1, \dots, B_n , в котором некоторые вершины A_i соединены с некоторыми B_j ; тем самым указано некоторое множество $\tilde{\Gamma}$ пар (i, j) — элементов таблицы $m \times n$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Для того чтобы по такому набору $\tilde{\Gamma}$ пар чисел однозначно восстанавливалась вся таблица, необходимо и достаточно, чтобы граф Γ был связан. В дереве с $m + n$ вершинами согласно задаче 8 будет как раз $m + n - 1$ ребер если Γ — дерево, то любой набор $m + n - 1$ чисел, занимающих клетки $(i, j) \in \tilde{\Gamma}$, можно дополнить так, что полученная таблица будет иметь нужный вид (*).

147. Рассмотрим фигуры F_1 и F_2 , полученные из данной фигуры F (объединения кругов) переносами на векторы длины 0,001, составляющие угол 60° друг с другом.

Три фигуры F , F_1 , F_2 не перекрываются и лежат внутри квадрата со стороной 1,001. Поэтому площадь S каждой из них меньше чем

$$(1,001)^2/3 < 0,34 \text{ .}$$

▽ Аналогичным образом для пространственного аналога этой задаче можно получить оценку $(1,001)^2/4 < 0,26$.

На плоскости можно существенно уточнить оценку: например, доказать, что $S < 0,287$ («Квант», 1972, № 8, с.58).

148. Пусть в сосудах A , B и C соответственно a , b и c литров воды, $0 < a \leq b \leq c$. Достаточно несколькими переливаниями добиться того, что в одном из сосудов станет меньше a литров воды (повторяя такую процедуру, мы сможем уменьшить количество воды в одном сосуде до 0). Разделим b на a с остатком: $b = ad + r$, $0 \leq r < a$. Будем выливать воду из B и C в A (в A будет становиться $2a$, 2^2a , 2^3a , ..., 2^ka литров воды) с таким расчетом, чтобы из B вылить как раз da литров; тогда в B останется $r < a$ литров. Так действовать можно – ведь d , как каждое натуральное число, можно и притом единственным образом представить в виде суммы некоторых из чисел $1, 2, 2^2, \dots, 2^k, \dots$. Соответствующие порции воды 2^ka нужно брать из B , остальные – из C .

При этом из C нужно будет вылить не больше воды, чем из B , откуда берется последняя порция, поэтому воды в C хватит.

149. Условие, что корни трехчленов $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ вещественны и перемежаются, эквивалентно тому, что графики $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точке (x_0, y_0) , лежащей ниже оси абсцисс: $y_0 < 0$. Решая уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, находим $x_0 = (q_2 - q_1)/(p_2 - p_1)$ и $y_0 = R(p_1 - p_2)^2$, где

$$R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1).$$

▽ Выражение R равно нулю тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 имеют общий (быть может, комплексный) корень. Такой многочлен от коэффициентов двух данных многочленов f_1 и f_2 любых степеней называется их «результантом».

150. Если плоскости параллельны, это очевидно. Пусть они не параллельны. Тогда проекцию тела на линию l пересечения плоскостей можно получить как проекцию на l каждой из проекций этого тела на ту и другую плоскости. (Всюду речь идет об ортогональных проекциях: множестве оснований перпендикуляров.) Но проекция круга на прямую в его плоскости – отрезок длины, равной диаметру круга.

151. В результате каждой операции сумма S попарных произведений соседних чисел увеличивается (в этой сумме $ab + bc + cd$ заменяется на $ac + cb + bd$, а $ab + cd < ac + bd$, если

$(a - d)(b - c) < 0$.) Но сумма S может принимать лишь конечное число различных значений (П13).

152. Решим сразу общую задачу б). Пусть прямая l пересекает контур описанного многоугольника в точках R и Q и делит пополам его периметр. Тогда ломаная из двух отрезков OR и OQ , где O — центр круга, делит пополам его площадь; это доказывается так же, как формула $S = Pr/2$ для площади описанного многоугольника периметра P : нужно провести из центра O отрезки ко всем вершинам многоугольника и записать площадь каждого треугольника как половину произведения длины основания на высоту, равную радиусу круга. Поэтому если прямая RQ делит также площадь пополам, то точка O должна лежать на этой прямой.

▽ Интересный вопрос — сколько может быть таких прямых (для треугольника и для n -угольника), которые делят пополам площадь и периметр («Квант», 1972, № 7, с. 35).

153. Утверждение верно для n чисел при любом $n \geq 4$ и доказывается «от противного». Предположим, что сумма или разность любых двух из n различных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ содержится среди остальных $n - 2$ чисел. Тогда $a_n + a_i > a_n$ и потому должны выполняться равенства $a_n - a_i = a_{n-i}$ ($1 \leq i \leq n-1$). При четном $n = 2k$ получаем $a_n - a_k = a_k$ — значит, разность a_n и a_k не содержится среди остальных чисел. При нечетном $n = 2k + 1$ надо еще рассмотреть пары (a_{n-1}, a_i) : для них $a_{n-1} + a_1 = a_n$, $a_{n-1} + a_i > a_n$ при $2 \leq i \leq n-2$ и потому должны выполняться равенства $a_{n-1} - a_i = a_{n-i-1}$, в частности $a_{n-1} - a_k = a_k$, что также приводит к противоречию.

154. а) Разобьем все 12 вершин на 6 пар противоположных вершин: A_1A_7 , A_2A_8 , A_3A_9 , ..., A_6A_{12} . При каждой операции в каждой паре меняет знак только одна вершина. Поэтому в парах A_2A_8 , ..., A_6A_{12} после $(2k - 1)$ -й операции будут разные знаки, а после $2k$ -й — одинаковые (в паре A_1A_7 будет все наоборот). Поэтому не может случиться, что в паре A_2A_8 знаки разные, а в паре A_3A_9 — одинаковые.

б) Рассмотрим разбиение на 4 группы по три вершины: $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ и будем рассуждать так же, как выше. Четность числа минусов в каждой группе меняется при каждой операции, и у групп $A_2A_6A_{10}$ и $A_3A_7A_{11}$ она одинаковая.

в) Аналогичные рассуждения для разбиения на 3 группы $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$, $A_3A_6A_9A_{12}$.

▽ Вообще, можно выяснить, какие наборы получаются друг из друга сменами знака у k последовательных вершин

m -угольника. Ответ таков: сопоставим каждому набору $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ чисел $\epsilon_k = \pm 1$ в вершинах n -угольника набор d чисел (x_1, x_2, \dots, x_d) , где $d = \text{НОД}(n, k)$, следующим образом:

$$x_i = \epsilon_i \epsilon_{i+d} \dots \epsilon_{i+n-d}.$$

Тогда два набора (ϵ_i) , (ϵ'_i) можно перевести друг в друга в том и только в том случае, если либо соответствующие наборы (x_i) , (x'_i) одинаковы, либо k/d чётно и наборы (x_i) , (x'_i) противоположны: $x_i = -x'_i$ для всех i .

155. Можно действовать методом «деления пополам». Вырежем из плоскости большой квадрат K_0 из $2^n \times 2^n$ клеток, содержащий все черные клетки и еще по крайней мере в 4 раза больше белых клеток; тогда площадь черных клеток составляет менее $1/5$ площади квадрата K_0 . Разрежем K_0 на четыре квадрата K_1 из $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ клеток. В каждом из K_1 черные клетки занимают не больше $4/5$ его площади, так что либо он удовлетворяет обоим условиям 1), 2), либо его можно вновь разрезать на четыре квадрата K_2 и т.д., вплоть до квадратов 2×2 , из которых все пустые нужно выбросить, а все с одной, двумя и тремя закрашенными клетками – оставить.

Аналогичные задачи можно сформулировать для прямой, разбитой на единичные отрезки (с константами $1/3$ и $2/3$), для пространства, разбитого на кубы (с константами $1/9$ и $8/9$).

156. Ответ: наименьшее число A_n кубиков, удовлетворяющих условию, равно

$$A_n = \begin{cases} n^2/2, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ (n^2 + 1)/2, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

В частности, $A_2 = 2$, $A_3 = 5$, $A_4 = 8$, $A_5 = 12$, $A_{10} = 50$.

Доказательство того, что меньшим числом кубиков обойтись нельзя, можно провести так. Для расстановки кубиков, удовлетворяющих условию: в каждой клетке нижней грани куба запишем число, показывающее, сколько кубиков лежит над этой клеткой. Воспользуемся теперь такой леммой.

Лемма. В таблице $n \times n$ расставлены целые неотрицательные числа, причем для каждой пары строка – столбец, на пересечении которых стоит нуль, сумма $2n - 1$ чисел в их объединении («кресте») не меньше n ; тогда сумма всех чисел в таблице не меньше $n^2/2$.

Ее доказательство очень похоже на рассуждение в задаче 126.

Если наименьшая из сумм по строкам и столбцам – пусть это будет сумма чисел в первой строке – равна $m < n$, то в этой строке не меньше $n - m$ нулей, и в каждом из начинающихся с них

$n - m$ столбцов сумма чисел не меньше $n - m$, а в каждом из m остальных столбцов сумма чисел не меньше m , а потому общая сумма не меньше

$$(n - m)^2 + m^2 \geq n^2/2.$$

Пример нужной расстановки 12 кубиков в кубе $5 \times 5 \times 5$ и 60 кубиков в кубе $10 \times 10 \times 10$ указан на рисунке 46, где число

		4	3	5						6	7	8	9	10
		3	5	4						7	8	9	10	6
		5	4	3						8	9	10	6	7
1	2									9	10	6	7	8
2	1									10	6	7	8	9
$n = 5$					1	2	3	4	5					
					2	3	4	5	1					
					3	4	5	1	2					
					4	5	1	2	3					
					5	1	2	3	4					
										$n = 10$				

Рис. 46

в клетке означает номер слоя, в который нужно поместить кубик над данной клеткой. Аналогично строятся примеры для других n .

▽ Наиболее интересный результат для k -мерного случая – оценка снизу числа «кубиков» (x_1, \dots, x_k) , если дополнительно известно, что никакие два из них не отличаются лишь в одной координате: их число не превосходит $n^{k-1}/k - 1$. Точный ответ для $k \leq 1$, по-видимому, в общем случае неизвестен [65].

157. Мы должны для каждой точки $(x; y)$ плоскости найти точку целочисленной решетки $(m; n)$, для которой величина $f_a(x - m, y - n)$ как можно меньше, и найти оценку этого минимума $\tilde{f}_a(x, y) = \min_{m, n} f_a(x - m, y - n)$ сверху. Удобно величину

$\sqrt{f_a(x_1 - x_2, y_1 - y_2)}$ называть «расстоянием» между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) по аналогии с обычным расстоянием

$\sqrt{f_0(x_1 - x_2, y_1 - y_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Заметим, что для

этого расстояния точная оценка такова: $\tilde{f}_0(x, y) \leq 1/2$. В самом

деле, для каждого из квадратов $m - \frac{1}{2} \leq x \leq m + \frac{1}{2}$,

$n - \frac{1}{2} \leq y \leq n + \frac{1}{2}$ расстояние от любой его точки $(x; y)$ до центра $(m; n)$ не больше $\sqrt{2}/2$, причем для любой вершины такого квадрата оно равно $\sqrt{2}/2$, т.е. $\bar{f}_0(x_0, y_0) = 1/2$.

Попробуем и для других «расстояний» $\sqrt{f_a}$, $0 < a < 2$, построить разбиение плоскости на фигуры $\Phi_{m,n}$ по такому признаку: точка $(x; y)$ относится к $\Phi_{m,n}$, если «расстояние» от нее до $(m; n)$ меньше (или не больше), чем до любой другой точки решетки. Достаточно найти фигуру Φ_{00} с центром $(0; 0)$ – остальные получатся из нее переносами центров на векторы с координатами $(m; n)$; поскольку при таких переносах сохраняется расстояние $\sqrt{f_a}$, то сохраняется и принцип, по которому отбираются точки области с тем или иным центром. Сейчас мы используем тот факт, что квадрат расстояния f_a – квадратичная функция от координат. Множество точек, которые ближе к $(0; 0)$, чем к $(m; n)$, – это просто полуплоскость: неравенство

$$x^2 + axy + y^2 \leq (x - m)^2 + a(x - m)(y - n) + (y - n)^2$$

эквивалентно линейному

$$(2m + an)x + (2n + am)y \leq m^2 + amn + n^2.$$

Чтобы найти фигуру Φ_{00} , надо было бы взять пересечение всех таких полуплоскостей (по всем $(m; n)$, отличным от $(0; 0)$). Оказывается, что достаточно взять лишь шесть из них, соответствующие шести парам $(0; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$. Это будет ясно, когда мы убедимся, что пересечение таких шести полуплоскостей (это выпуклый шестиугольник $(-1 \leq 2x + ay \leq 1, -1 \leq ax + 2y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1)$ не пересекается со своими образами при параллельных переносах на векторы $(m; n)$ (точнее, имеет с ними лишь общие участки границы, рис.47); таким образом, Φ_{00} не может быть меньше, чем этот шестиугольник, и значит, с ним совпадает. Максимум $f_a(x, y)$ при $(x; y) \in \Phi_{00}$ достигается в вершинах этого шестиугольника: ведь при движении по отрезку любой прямой $x = b + ut, y = c + vt$ квадрат расстояния $f_a(b + ut, c + vt)$ зависит от t

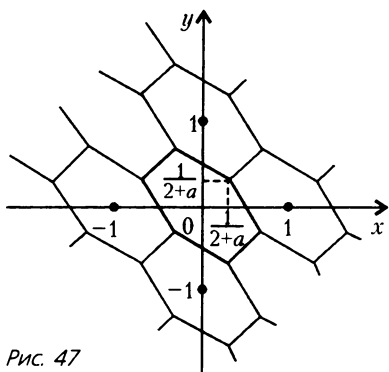


Рис. 47

как квадратный трехчлен с положительным коэффициентом $u^2 + auv + v^2$ при t^2 , так что f_a принимает максимальное значение на концах отрезка. Найдя координаты вершин (см. рис.47) и подставив их в выражение для f_a , мы получим точную оценку для \bar{f}_a ; $\bar{f}_a \leq 1/(a+2)$. Та же оценка верна и для $a=2$, когда $\bar{f}_2(x,y)$ есть просто квадрат разности между $x+y$ и ближайшим целым числом: точная оценка $\bar{f}_2(x,y) \leq 1/4$.

∇ Основная идея решения этой задачи – разбиение плоскости на области, содержащие заданные центры, при котором каждая точка относится к ближайшему центру – используется в разных задачах анализа, геометрии, теории чисел (см. [71]).

158. Оценим сначала необходимое число переключателей снизу. Поскольку каждый переключатель может находиться в двух состояниях, то схема из m переключателей может находиться в 2^m различных состояниях. Если необходимо реализовать все $n!$ различных соединений n входов с n выходами:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array}$$

где (i_1, i_2, \dots, i_n) – любая перестановка из чисел $1, 2, \dots, n$, для числа переключателей m должно выполняться неравенство $2^m \geq n!$, т.е. число переключателей в универсальной схеме заведомо не меньше $\log_2(n!)$.

В частности, для $n=3$ получаем: $2^m \geq 6$, откуда $m=3$; нетрудно проверить, что схема, указанная на рисунке 8,б (в условии), как раз дает пример 3-универсальной схемы. Для $n=4$ получаем: $2^m \geq 4! = 24$, откуда $m \geq 5$. Действительно, 4-универсальную схему из 5 переключателей можно построить: проверьте, что схема на рисунке 48,а при $2^5 = 32$ различных положениях переключателей реализует все 24 возможные перестановки множества $\{1, 2, 3, 4\}$.

Доказать 8-универсальность схемы, изображенной на рисунке 8,в (в условии), перебором практически невозможно; число 8! слишком велико. Но нетрудно указать правило, позволяющее любую данную перестановку ϕ из 8 элементов $k \rightarrow i_k$, $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$, реализовать на схеме. Это правило должно указать, через какой блок – A или B – осуществлять каждую из 8 связей $k \rightarrow \phi(k) = i_k$. При этом должны выполняться такие условия:

если $k-l=4$ или $i_k-i_l=4$, то связи $k \rightarrow i_k$ и $l \rightarrow i_l$ должны проходить через разные блоки A и B .

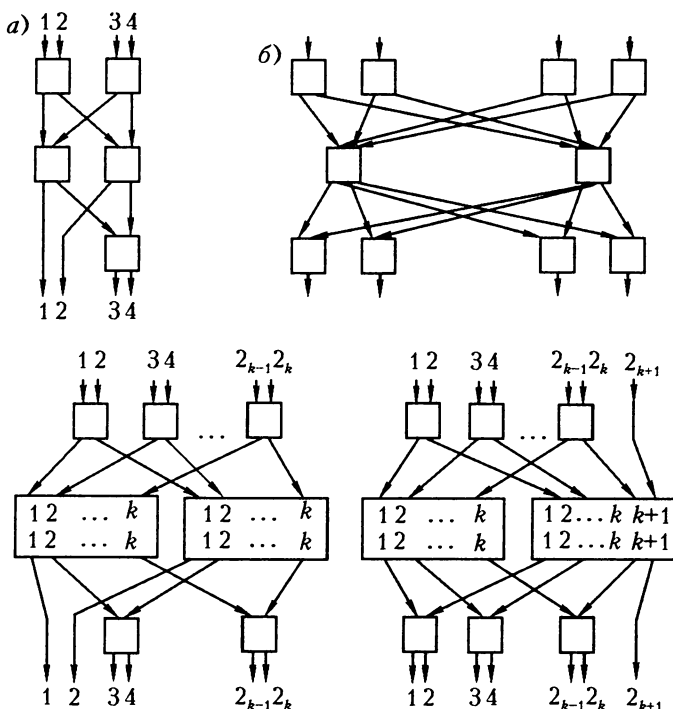


Рис. 48

Ясно, что эти условия необходимы и достаточны для отсутствия «склеек» (ситуаций, встречающихся и в реальной телефонной сети, когда два входа оказываются соединенными с одним выходом, или наоборот).

Вот нужное нам правило.

Объявляем «соседними» с парой $k \rightarrow \varphi(k)$ две пары $j \rightarrow \varphi(j)$ и $l \rightarrow \varphi(l)$ такие, что $|k - j| = 4$ и $|\varphi(k) - \varphi(l)| = 4$, тогда все пары $k \rightarrow \varphi(k)$ разобьются на «хороводы» (циклы) — у каждой будет два соседа, причем эти циклы будут содержать по четному числу пар. В каждом цикле будем попеременно осуществлять связи $k \rightarrow \varphi(k)$ через блок А и через блок В, таким образом «соседи» окажутся соединенными через разные блоки.

Теперь из 4-универсальности блоков А и В следует 8-универсальность всей схемы.

Аналогичным образом можно построить 2^{k+1} -универсальную схему, исходя из двух 2^k -универсальных схем и еще $2 \cdot 2^k$ переключателей. Если начать с 5-элементной 4-универсальной

схемы (это, конечно, лучше, чем начать с 2-универсального переключателя и получить вместо рисунка 48,а 4-универсальную схему – рисунок 48,б – из 10 элементов!), то при $n = 2^k$ схема будет содержать $2n \log_2 n - \frac{11n}{4}$ – переключателей (в частности, при $n = 8$ их 26), что для любого $n \neq 2^k$ дает оценку сверху для числа переключателей в минимальной n -универсальной схеме порядка $4n \log_2 n$. Лишь слегка изменив конструкцию схемы (рис. 48,в), можно переходить от k -универсальной к $2k$ и $(2k + 1)$ -универсальной и улучшить оценку сверху до $n \log_2 n$. Заметим, что (при больших n) $\log_2 n! \approx n(\log_2 n - \log_2 e)$, [75].

159. Пусть R – точка пересечения прямых QN и CD , а O – центр прямоугольника $ABCD$. Из $OM = ON$ следует, что $PC = CR$, и поэтому треугольник PNR – равнобедренный (NC – одновременно медиана и высота этого треугольника).

Утверждение задачи следует из равенства углов $\angle MNP = \angle NPR$ и $\angle QNM = \angle QRP$.

160. Пусть $[a_1, b_1]$ – отрезок с наименьшим правым концом. Если число отрезков, содержащих точку b_1 , больше 7, то задача решена. Если оно меньше или равно 7, то имеется по крайней мере 43 отрезка, лежащих целиком правее $[a_1, b_1]$. Выберем из них отрезок $[a_2, b_2]$ с наименьшим правым концом. Тогда либо b_2 принадлежит 8 отрезкам, либо имеется 36 отрезков, лежащих правее b_2 . Продолжая это рассуждение, мы либо найдем точку, принадлежащую 8 отрезкам, либо получим 7 попарно не пересекающихся отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_7, b_7]$ таких, что правее $[a_k, b_k]$ лежит не меньше $50 - 7k$ отрезков, т.е. правее $[a_7, b_7]$ лежит еще по крайней мере один отрезок $[a_8, b_8]$,

∇ Точно так же можно доказать, что из $mn + 1$ отрезков можно выбрать либо $m + 1$ попарно не пересекающихся отрезков, либо $n + 1$ отрезков, имеющих общую точку. Вот еще похожая задача: из любых $mn + 1$ натуральных чисел можно выбрать цепочку из $m + 1$ чисел, в которой каждое делится на предыдущее, либо $n + 1$ чисел, из которых ни одно не делится на другое. Это частные случаи общей теоремы Дилуорса: в частично упорядоченном множестве из $mn + 1$ элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания элементов, либо $n + 1$ попарно несравнимых элементов ([64], задача 5–5 из [4]).

Чтобы применить эту теорему к нашей задаче об отрезках, надо считать, что один отрезок «больше» другого, если он целиком лежит правее; тогда «попарно несравнимые» отрезки обязательно имеют общую точку (ею служит самый левый из их правых концов).

161. Ответ: $x = 1972$. Поскольку $4^7 + 4^{1000} + 4^x = 2^{54} (1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2x-54})$, выражение в скобках будет полным квадратом при $2x - 54 = 2 \cdot 1945$, т.е. при $x = 1972$. Если же $x > 1972$, то $2^{2(x-27)} < 1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2(x-27)} < (2^{x-27} + 1)^2$, т.е. данное число заключено между квадратами двух последовательных натуральных чисел.

162. Сначала докажем следующие два утверждения.

а) если $a^k + b^k$ делится на $a^n + b^n$, то и $a^{k-n} - b^{k-n}$ делится на $a^n + b^n$;

б) если $a^l - b^l$ делится на $a^n + b^n$, то и $a^{l-n} + b^{l-n}$ делится на $a^n + b^n$.

Эти утверждения легко следуют из взаимной простоты a и b и тождеств

$$a^k + b^k = a^{k-n} (a^n + b^n) - b^n (a^{k-n} + b^{k-n}),$$

$$a^l - b^l = a^{l-n} (a^n + b^n) - b^n (a^{l-n} + b^{l-n}).$$

Разделим m на n с остатком: $m = qn + r$, где $0 \leq r < n$; вычитая q раз n из m , мы получим r .

Из условия задачи и утверждений а) и б) следует, что $a^r + (-1)^q b^r$ делится на $a^n + b^n$; но $0 \leq |a^r + (-1)^q b^r| < a^n + b^n$. Отсюда следует, что $r = 0$ (и при этом q нечетно!).

163. Предположим, что в некоторых строках таблицы встречаются одинаковые числа. Пусть n — номер самой верхней из этих строк, а p и q — равные числа в этой строке.

Поскольку в $(n - 1)$ -й строке равных чисел нет, p и q получены из чисел r и s этой строки разными действиями: пусть $p = r^2$, $q = s + 1$, тогда $s = r^2 - 1$.

На пути, ведущем из верхнего числа a в число s , могли встречаться возведения в квадрат и прибавления единиц. Самым большим числом, возводившимся в квадрат, могло быть $r - 1$ (поскольку $s = r^2 - 1$). Это значит, что число s могло быть получено из последнего встретившегося на пути квадрата не менее чем за $r^2 - 1 - (r - 1)^2 = 2r - 2$ шагов, причем на каждом шаге добавлялись единицы. Таким образом, число s получилось из a не менее чем за $2r - 1$ шагов (т.е. $n - 2 \geq 2r - 1$). Но в одной строчке с s стоит r , а любое число, полученное из a за такое число шагов, не меньше $a + 2r - 1 > r$. Таким образом, при получении s не было возведений в квадрат, так что q — крайнее правое,

наименьшее число в n -й строке, что противоречит равенству $p = q$.

∇ Анализ решения задачи показывает, что операцию возведения в квадрат можно заменить любой функцией f , принимающей натуральные значения и такой, что $f(n+1) - f(n) > n+1$.

164. Разложим квадраты в порядке убывания сторон и будем укладывать их, начиная с самого большого $x \times x$, слева направо

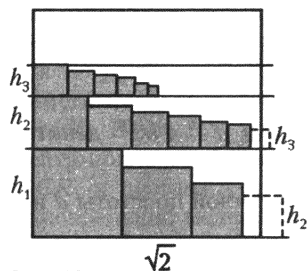


Рис. 49

на нижнюю сторону квадратной площадки $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ (рис.49); как только очередной квадрат не помещается – вылезает за правую сторону площадки, – мы проводим по верхней стороне левого квадрата горизонтальную прямую и начинаем новый ряд. Пусть $x = h_1, h_2, h_3 \dots$ – стороны квадратов, примыкающих к левой стороне площадки. Мы должны доказать, что высота

$h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots$ меньше $\sqrt{2}$, т.е. что квадраты исчерпаются раньше, чем вылезут за верхнюю сторону площадки.

Оценим их общую площадь. Перенесем мысленно каждый из левых квадратов со сторонами h_k ($k = 2, 3, \dots$) в конец предыдущего $(k-1)$ -го ряда. Он вылезет за правую сторону, поэтому после такой процедуры площадь квадратов $(k-1)$ -го ряда будет не меньше $(\sqrt{2} - x)h_k$; при этом в 1-м ряду мы не считаем левый большой квадрат. Таким образом, общая площадь всех квадратов, равная по условию 1, не меньше

$$x^2 + (\sqrt{2} - x)(h_2 + h_3 + \dots) = x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x).$$

Отсюда можно получить оценку для h . Поскольку $\sqrt{2} - x > 0$, из неравенства $x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x) \leq 1$ следует

$$h \leq \frac{1 - x^2}{\sqrt{2} - x} + x = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} \left(2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2 - x\sqrt{2}} \right) \leq \sqrt{2},$$

так как число в круглой скобке вида $t + \frac{1}{t}$ не меньше 2 (равенство возможно лишь при $x = \sqrt{2}/2$). Этой задаче и ее вариантам посвящена заметка [67].

165. Точки K, L, M, N – пересечения высот треугольников AOB, BOC, COD и DOA – вершины параллелограмма, две стороны которого идут по прямым, проведенным через точки A

и C перпендикулярно BD , две другие – по прямым, проведенным через точки B и D перпендикулярно AC (рис.50,а).

Точки K', L', M' и N' – пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и DOA – вершины параллелограмма, две

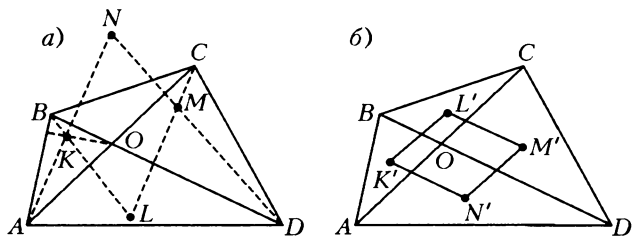


Рис. 50

стороны которого параллельны BD и делят отрезок AC на три равные части, две другие параллельны AC и делят отрезок BD на три равные части (рис.50,б).

Ясно, что стороны этих параллелограммов соответственно перпендикулярны. Докажем, что параллелограммы подобны; отсюда будет следовать, что если один из них повернуть на 90° , то не только его стороны, но и диагонали станут параллельны диагоналям другого, т.е. $K'M' \perp KM$ (и $L'N' \perp LN$), что и требуется. Для подобия параллелограммов нужна пропорциональность сторон. Длины сторон $K'L'$ и KN равны $AC/3$ и $BD/3$. Проекция стороны KL на прямую BD совпадает с проекцией отрезка AC на эту прямую, поэтому $KL = AC \cdot \operatorname{ctg} \varphi$, где φ – острый угол между прямыми AC и BD ; аналогично, $KN = BD \cdot \operatorname{ctg} \varphi$. Таким образом, стороны обоих параллелограммов относятся как $AC : BD$, откуда следует подобие.

Если угол φ – прямой, то все точки K, L, M, N сливаются, и задача теряет смысл.

166. Каждая прямая, разбивающая квадрат на две трапеции (или прямоугольника) с отношением площадей $2 : 3$, в таком же отношении делит среднюю линию квадрата, идущую по средним линиям этих трапеций; это следует из формулы: площадь трапеции равна произведению высоты на длину средней линии.

Таких точек, которые делят одну из средних линий в отношении $2 : 3$, всего четыре (рис.51), а прямых – девять, следовательно, в какой-то из этих точек должны пересекаться три прямых (П9).

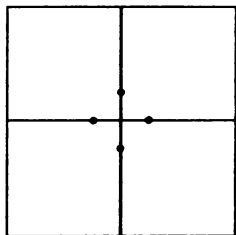


Рис. 51

167. Пользуясь теоремой о вписанном угле, сумму $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3$ можно найти как половину величины

$$\begin{aligned} \left(360^\circ - A_7 \overset{\cup}{A_1 A_2} \right) + \left(360^\circ - A_2 \overset{\cup}{A_3 A_7} \right) + \left(360^\circ - A_4 \overset{\cup}{A_5 A_6} \right) = \\ = 720^\circ + A_6 \overset{\cup}{A_7} . \end{aligned}$$

По условию центр O лежит внутри семиугольника, поэтому дуга $A_6 A_7$ не может быть больше 180° и

$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ .$$

168. Обозначим четыре разряда (слева направо) через r_1, r_2, r_3, r_4 . Игра распадается на две фазы: «дебют» и «эндшпиль» – вторая фаза начинается, как только 2-й игрок поставит некоторую цифру в старший разряд r_1 . Ясно, что в дебюте 1-й игрок не должен называть маленьких цифр (от 0 до 3) или больших (от 6 до 9), поскольку 2-й, помещая такую цифру в r_1 (маленькую – в первое число, большую – во второе), переходит в заведомо выигрышный эндшпиль: если разность первых цифр не больше 3, то разность чисел не больше 3999. Впрочем, если 1-й назвал первой цифру 4 (или 5), то 2-й может добиться разности не меньшей 4000, сразу перейдя в эндшпиль ходом $r_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ * \end{pmatrix}$ или $r_1 = \begin{pmatrix} * \\ 5 \end{pmatrix}$, а затем все появляющиеся цифры 0 (соответственно, 9) помещая в разряды r_2, r_3, r_4 , пока они не заполнятся; естественно, первая же цифра – не 0 (не 9) – будет поставлена в r_1 (что приведет к разности, не превосходящей 3999), и под этой угрозой 1-й не сможет добиться лучшей финальной позиции, чем $\frac{4000}{0000} \begin{pmatrix} 9999 \\ -5999 \end{pmatrix}$. Мы предъявили стратегию 2-го, доказывающую утверждение а).

Но не может ли 2-й добиться большего, в дебюте расставив в разрядах $r_2 - r_4$ некоторые цифры 4 и 5 и в удачный для себя момент перейдя в эндшпиль? Чтобы помешать этому, 1-й должен следить за тем разрядом r_i с наименьшим i , в котором стоят одна цифра и одна звездочка либо две разные цифры. Если r_i равен $\begin{pmatrix} * \\ 4 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} * \\ 5 \end{pmatrix}$, он должен называть цифру 5, если $\begin{pmatrix} 4 \\ * \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 5 \\ * \end{pmatrix}$ – цифру 4 (если все разряды совпадают или $r_i = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, ход может

быть любым – скажем 5, а опасная позиция с $r_i = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ при такой стратегии 1-го не может получиться). После перехода в эндшпиль из такого дебюта 1-й может называть нули (если в r , цифра поставлена в верхнее число), или девятки (если в нижнее). Мы предъявили стратегию 1-го, доказывающую утверждение б).

▽ Можно доказать, что при любом числе разрядов $n \geq 1$ в такой игре ее «цена» – разность, которая получается при наилучшей игре обоих, – равна $4 \cdot 10^{n-1}$.

169. Ответ: наибольшее возможное значение s равно $\sqrt{2}$, оно достигается при $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}/2$.

Мы должны выяснить, для какого наибольшего s могут одновременно выполняться неравенства $x \geq s$, $y + 1/x \geq s$, $1/y \geq s$ (по крайней мере одно из них должно быть при этом равенством). Ясно, что s можно считать положительным – например, для $s = 1$ наши три неравенства совместны (годится, скажем, решение $x = 1$, $y = 1$). Из этих трех неравенств вытекают следующие: $y \leq 1/s$, $1/x \leq 1/s$, $s \leq y + 1/x \leq 2/s$, откуда $s^2 \leq 2$, $s \leq \sqrt{2}$. Возможен случай, когда все неравенства становятся равенствами: $y = 1/x = \sqrt{2}/2$, при этом $s = \sqrt{2}$.

170. Для треугольника ABC это доказать легко: если точка лежит внутри этого треугольника и треугольники AOB , BOC , COA равнобедренные, то по крайней мере два из углов $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ больше 120° . Пусть это углы AOB и BOC . Тогда $AO = BO = OC$. Пользуясь этим частным случаем как леммой, докажем теперь утверждение задачи для многоугольника. Если A и B – любые две его вершины, то либо в угле, образованном продолжениями AO и BO за точку O , есть

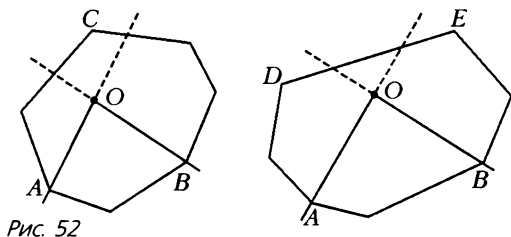


Рис. 52

вершина C многоугольника, либо этот угол пересекает сторона DB многоугольника (рис.52). В первом случае точка лежит внутри $\triangle ABC$ и, как доказано выше, $AO = BO = CO$, во втором – O лежит внутри $\triangle BDE$ и $\triangle ADE$, поэтому $AO = DO = EO = BO$.

171. Ответ: нельзя. Будем говорить, что две фигуры заполнены одинаково, если в них одинаковое число нулей, единиц и двоек. Заштрихованные прямоугольники на рисунке 53, а заполнены одинаково (к двум соседним можно приставить квадрат 3×3 , образующий с каждым из них прямоугольник 3×4 ; остается вычесть из стандартного набора для прямоугольника

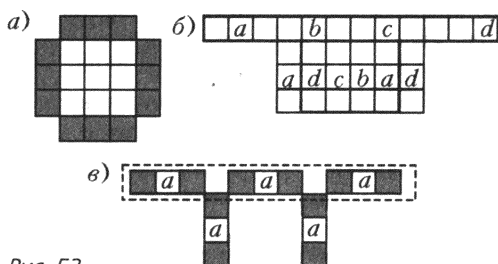


Рис. 53

3×4 содержимое квадрата). Полоска 1×12 всегда имеет то же стандартное содержимое, что и прямоугольник 3×4 (на рис. 53, б одинаковы прямоугольники, обозначенные одной буквой), т.е. в ней 5 двоек. С другой стороны, рассмотрим (не у края бумажного листа) прямоугольник a размерами 3×1 , содержащий не менее 2 двоек; такой найдется в любом прямоугольнике 3×4 , состоящем из четырех прямоугольников 3×1 и содержащем 5 двоек. Расположим рядом с ним, как показано пунктиром на рисунке 53, в, полоску 1×12 . В ней не менее $2 \cdot 3 = 6$ двоек. Противоречие.

172. Ответ: наименьшее значение s , равное $1 - 2^{-1/n}$, достигается при $x_k = 2^{k/n} (1 - 2^{-1/n})$.

Положим $y_0 = 1$, $y_k = 1 + x_1 + \dots + x_k$ ($1 \leq k \leq n$). Тогда $y_n = 2$, $x_k = y_k - y_{k-1}$, если все данные числа не превосходят s , т.е.

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_k} = 1 - \frac{y_{k-1}}{y_k} \leq s,$$

то $1 - s \leq y_{k-1}/y_k$. Перемножив эти неравенства ($k = 1, 2, \dots, n$), получим: $(1 - s)^n \leq y_0/y_n = 1/2$, откуда $s \geq 1 - 2^{-1/n}$. Это значение достигается, когда (для всех k) $2^{-1/n} = 1 - s = y_{k-1}/y_k$, т.е. когда y_k образуют геометрическую прогрессию $y_1 = 2^{1/n}$, $y_2 = 2^{2/n}$, ..., $y_n = 2$ со знаменателем $2^{1/n}$, а $x_k = 2^{k/n} - 2^{(k-1)/n}$.

173. Заменяем в таблице турнира все четные числа нулями, нечетные — единицами. Обозначим полученную таблицу через A ,

ее элементы – через a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$): $a_{ij} = 1$, если i -я и j -я команды сыграли вничью, $a_{ij} = 0$ – в противном случае. Таблица удовлетворяет условию симметрии и на диагонали стоят нули:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ii} = 0 \quad \text{для всех } i, j. \quad (1)$$

Требование, которое предъявляется к таблице в условии задачи, можно сформулировать так: для любого набора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из нулей и единиц, отличного от $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, хоть одно из чисел

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (A)$$

нечетно. Для каждой группы команд мы строим набор \mathbf{x} , полагая $x_j = 1$, если j -я команда входит в группу, и 0 , если не входит, при этом y_i равно количеству ничьих i -й команды с этой группой. Будем набор (y_1, y_2, \dots, y_n) , полученный из \mathbf{x} с помощью таблицы A по правилу (A), обозначать $A\mathbf{x}$. Поскольку нас интересует лишь различие между четными и нечетными числами, удобно упростить арифметику, оставив лишь два числа 0 и 1 , и считать, что $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0 + 0 = 0$ (правила умножения и все основные законы арифметики при этом сохраняются). Тогда \mathbf{y} также будет набором из 0 и 1 , При; этом основное требование к таблице принимает вид:

$$\text{если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ то } \mathbf{y} = A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}; \quad (2)$$

такую таблицу A назовем невырожденной.

Теперь, когда мы от хоккея полностью перешли к алгебре, можно приступить к решению задачи: доказать, что при нечетном n условия (1) и (2) не могут одновременно выполняться. Будем упрощать нашу таблицу A , сохраняя эти условия.

Условие (2) не нарушится, если таблицу A изменить, прибавив к первой строке вторую: если $A\mathbf{x} = \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то для новой таблицы A' будет $A'\mathbf{x} = \mathbf{y}' = (y_1 + y_2, y_2, \dots, y_n)$; если $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то и $\mathbf{y}' \neq \mathbf{0}$. Условие (2) не нарушится также, если к первому столбцу A прибавить второй: если $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то для новой таблицы A'' будет $A''\mathbf{x}'' = \mathbf{y}$, где $\mathbf{x}'' = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$; если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то и $\mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$. Разумеется, можно также прибавлять i -ю строку к j -й или i -й столбец к j -му; если сделать такие два преобразования одновременно, то новая таблица будет не только невырожденной (2), но также симметричной (1) (при этом правило $1 + 1 = 0$ сохраняет нули на диагонали).

Приступим теперь к упрощению таблицы A . Можно считать, что «первые две команды сыграли вничью», т.е. $a_{12} = a_{21} = 1$. Прибавляя первую строку (и первый столбец) к тем строкам (столбцам), где стоят единицы во втором столбце (соответствен-

а)					
0	1	0	...	0	
1	0	0		0	
0	0				
...					
0	0				

б)					
0	1	0			
1	0	0			
0	0	0			

Рис. 54

но строке), мы избавимся от всех этих единиц; точно так же, с помощью второй строки (и второго столбца) мы избавимся от единиц в первом столбце (и в первой строке) и получим таблицу A_{n-2} такого вида, как показано на рисунке 54,а. Остаточная после отбрасывания первых двух строк и столбцов таблица A_{n-2} размера $(n-2) \times (n-2)$ по-прежнему удовлетворяет условиям (1) и (2): ведь $Ax \neq 0$ для любого $x = (0, 0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$, а оставшаяся таблица A_{n-2} преобразует координаты $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ точно так же. Продолжая те же упрощения, переходя к таблицам A_{n-4}, A_{n-6}, \dots , мы в конце концов, если n было нечетно, придем к таблице 3×3 , из которой после упрощений получим таблицу A_3 , показанную на рисунке 54,б. Но она вырождена: если $x = (0, 0, 1)$, то $A_3x = 0$. Получили противоречие.

▽ Содержание этой задачи совпадает с известной специалистам теоремой из линейной алгебры (о том, что кососимметрическая матрица $n \times n$ при нечетном n вырождена), которая над полем из двух элементов 0 и 1 приобретает некоторую дополнительную трудность.

174. Приведем решение задачи б). Эксперт должен проделать такие три взвешивания.

1°. Эксперт кладет на левую чашку 1-ю монету, на правую – 8-ю, так как правая чашка перевешивает, то суд видит, что 1-я монета фальшивая, а 8-я – настоящая.

2°. На правую чашку кладутся 2-я, 3-я и 8-я монеты, на левую – 9-я, 10-я и 1-я. Левая чашка перевешивает, и суд убеждается, что 2-я и 3-я монеты фальшивые, а 9-я и 10-я – настоящие.

3°. Эксперт кладет на левую чашку 4-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 8-ю, 9-ю и 10-ю монеты, а на правую – остальные. Правая чашка перевешивает, и суд видит, что на ней больше настоящих монет, чем на левой, а на левой чашке фальшивых монет больше, чем на правой. Это и доказывает суду, что 4-я, 5-я, 6-я и 7-я монеты фальшивые, а 11-я, 12-я, 13-я и 14-я – настоящие.

∀ Точно так же проверка $2^k - 1$ фальшивых и $2^k - 1$ настоящих монет может быть осуществлена за k взвешиваний при любых $k \geq 1$.

175. Предположим, что существует полный квадрат $D = A^2$, удовлетворяющий условиям задачи. Число A , очевидно, оканчивается цифрой 5, т.е. $A = 10a + 5$. Поэтому $D = 100a(a + 1) + 25$ оканчивается на 25. Число $a(a + 1)$ оканчивается либо на 2, либо на 6, либо на 0. Поэтому третья справа цифра числа D равна 6. Итак, $D = 1000k + 625$. Мы видим, что D делится на $5^3 = 125$, и поэтому и на 5^4 . Поэтому k делится на 5 и, значит, четвертая справа цифра числа D – либо 0, либо 5, что невозможно.

176. Задача решается по индукции. Для $n = 3$, $n = 5$ и $n = 6$ требуемые системы точек изображены на рисунке 55, а–в, а на рисунке 55, г показан один из способов, позволяющих из системы n точек A_1, A_2, \dots, A_n , соединенных нужным образом стрелками,

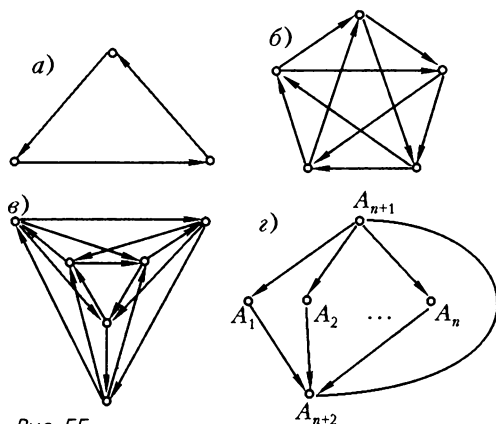


Рис. 55

получить требуемую систему с $n + 2$ точками $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$. Для этого к уже имеющимся стрелкам добавим стрелки, идущие из A_{n+1} ко всем точкам A_1, A_2, \dots, A_n ; из каждой точки A_1, A_2, \dots, A_n проведем стрелку в A_{n+2} ; наконец, из A_{n+2} – стрелку в точку A_{n+1} .

В силу принципа полной индукции утверждение задачи справедливо при всех нечетных $n \geq 3$ и всех четных $n \geq 6$.

Для $n = 4$ требуемой системы точек не существует.

177. Пусть P и Q – точки пересечения касательной к данной окружности в точке C со сторонами угла. Так как $AP = PC$, то $\triangle APC$ и вместе с ним $\triangle OPQ$ – равнобедренный. Поэтому $AO = CQ - OB = BQ$ (рис.56).

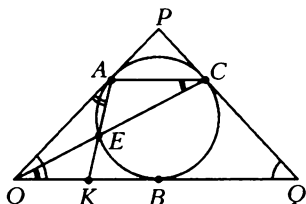


Рис. 56

Заметим, что $\angle OAE = \angle OCA = \angle COQ$, а $\angle AOB = \angle CQB$. Из подобия $\triangle OAK \sim \triangle QOC$ следует:

$$\frac{OK}{OA} = \frac{CQ}{OQ} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $OK = OA/2 = OB/2$. Равенство углов $\angle OAE = \angle ACO$ следует из теоремы об угле между касательной и хордой.

178. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Так как $f(1) = g(1)$ и $f(-1) = g(-1)$, то $|g(1)| \leq 1$ и $|g(-1)| \leq 1$, кроме того, $|c| = |f(0)| \leq 1$.

Предположим, что существует точка x , для которой $|g(x)| > 2$. Тогда вершина параболы $y = g(x)$ — точка с координатами $(x_0, g(x_0))$, причем $|x_0| \leq 1$ и $|g(x_0)| > 2$. Выделяя полный квадрат, получим $g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$. Подставим в это равенство вместо x ближайшее к x_0 из чисел -1 и 1 (можно считать для определенности, что это 1). Тогда $|1 - x_0| \leq 1$ и поэтому $|g(x_0)| = |g(1) - c(1 - x_0)^2| \leq |g(1) + |c|| \leq 1 + |c| \leq 2$, что противоречит неравенству $|g(x_0)| > 2$.

Пример трехчлена $f(x) = 2x^2 - 1$ показывает, что оценку $|g(x)| \leq 2$ улучшить нельзя. (В этом случае $g(x) = -x^2 + 2$.)

179. Ответ: наибольший возможный номер победителя — 20.

Так как теннисист с номером k может проиграть (не считая более сильных) только $(k + 1)$ -му и $(k + 2)$ -му теннисисту, то после каждого тура номер сильнейшего из победителей не может увеличиться больше чем на 2. Таким образом, номер победителя всего турнира не больше 21. Покажем, однако, что и 21-й теннисист победителем стать не мог. Для этого после первого тура должны были бы выбыть 1-й и 2-й, проиграв 3-му и 4-му (иначе номер победителя меньше 21), во втором должны выбыть 3-й и 4-й, а 5-й и 6-й — победить их и т.д. вплоть до 9 тура, в котором 19-й и 20-й должны победить 17-го и 18-го. Таким образом, 21-й теннисист не попадает в финал, где встречаются двое.

Осталось привести пример турнира, в котором побеждает 20-й игрок. Для этого всех теннисистов разобьем на две группы по 512 человек. В первую группу включим 19-го, 20-го и еще 510

более слабых игроков. Турнир в группе организуем так, чтобы выиграл 20-й (это, очевидно, можно сделать). Во вторую группу отнесем 1-го, 2-го, 18-го и оставшихся более слабых игроков и организуем турнир так, чтобы победил 18-й. Это можно сделать, организовав турнир так, как это описано выше: в первом туре 3-й и 4-й выигрывают у 1-го и 2-го, во втором 5-й и 6-й — у 3-го и 4-го и т.д. до восьмого тура, когда 17-й и 18-й выигрывают у 15-го и 16-го, после чего в девятом туре 18-й выигрывает у 17-го. В финале встречаются 20-й и 18-й и, следовательно, 20-й может победить.

▽ Можно доказать по индукции, что в случае 2^n игроков наибольший номер победителя — $2n$.

180. Если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то либо $f(x) > x$ при всех x (если $a > 0$), либо $f(x) < x$ при всех x (если $a < 0$), но тогда либо $f(f(x)) > f(x) > x$, либо $f(f(x)) < f(x) < x$, а это значит, что уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

▽ Утверждение задачи верно не только для квадратного трехчлена, но и для любой непрерывной функции.

181. а) Заметим, что если к данному множеству черных клеток добавить еще несколько черных клеток, то после перекрашивания могут возникнуть лишь дополнительные черные клетки. Добавим к исходному множеству M клетки так, чтобы получился черный квадрат $m \times m$ клеток.

Через $2m - 1$ шагов от квадрата (а значит, и от M) ничего не останется.

б) Будем множество черных клеток, которое получается из M за t шагов, обозначать через M_t . Докажем индукцией по n , что для любого множества M из n клеток M_n пусто. (Для $n = 1$ это ясно.) Пусть для множеств менее чем из n клеток это доказано, и рассмотрим произвольное множество M из n клеток. Мы можем считать, что M лежит на координатной плоскости Oxy в углу $x \geq 0$, $y \geq 0$, причем в полосах $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$ лежит по крайней мере по одной клетке из M (рис.57). Тогда по предположению индукции M_{n-1} не пересекается с углом $x \geq 0$, $y \geq 1$ (клетки в полосе $0 \leq x \leq 1$ не влияют на происходящее при $x \geq 1$), следовательно, M_{n-1} лежит в поло-

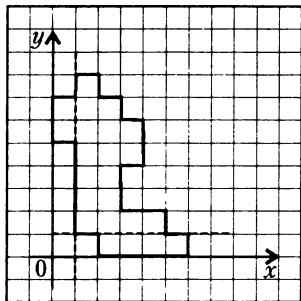


Рис. 57

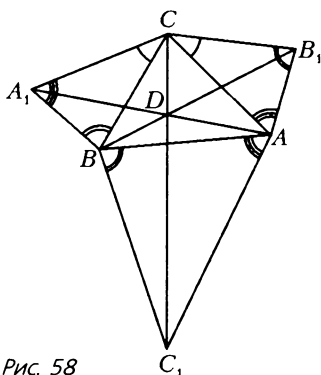


Рис. 58

се $0 \leq x \leq 1$. Аналогично можно доказать, что M_{n-1} лежит в полосе $0 \leq y \leq 1$. Значит, M_{n-1} может содержать лишь одну клетку, а M_n пусто.

▽ Более сложным задачам такого типа посвящена статья [74].

182. Пусть D – точка пересечения AA_1 и BB_1 . Поскольку $\angle A_1CA = \angle B_1CB$ (рис. 58) и $A_1C : BC = AC : B_1C$, треугольники A_1CA и B_1CB подобны, следовательно, $\angle DBC = \angle DA_1C$. Поэтому точки B, D, C, A_1 лежат на одной окружности. Там же доказывается, что точки A, D, C, B_1 лежат на одной окружности, т.е. точка D является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1BC и AB_1C .

Заметим теперь, что $\angle ADB = 180^\circ - \angle ADB_1 = 180^\circ - \angle AC_1B$, поэтому точки A, D, B и C_1 лежат на одной окружности. Таким образом, D – точка пересечения всех трех описанных окружностей, а по доказанному ранее – прямая CC_1 проходит через точку D .

183. Эту задачу можно решить методом математической индукции. Возможно и такое решение.

Занумеруем N человек числами от 1 до N и будем знакомить человека с номером i и человека с номером j , если $|i - j| \leq N/2$. Легко видеть, что при таком способе знакомства одинаковое количество знакомых будет только у людей с номерами k и $N - k$. Следовательно, никакие три человека не будут иметь одинакового количества знакомых.

184. а) См. рисунок 59, б).

б) Выделим на доске каемку из 28 крайних полей. При обходе доски король побывал в каждом из них. Занумеруем эти поля в

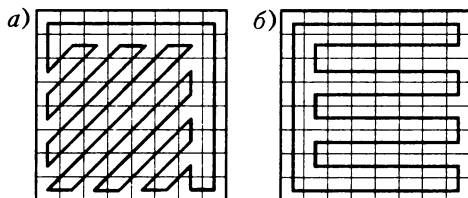


Рис. 59

том порядке, в каком король их посещал, Весь путь короля разобьется на 28 участков: от поля 1 до поля 2; от поля 2 до поля 3; ...: от поля 28 до поля 1. Путь короля не имеет самопересечений. Поэтому клетки 1 и 2, 2 и 3, ..., 27 и 28, 28 и 1 являются соседними клетками каемки. (Если, например, клетки 1 и 2 не соседние, то они разбивают граничную каемку на 2 части и путь короля из любой клетки одной из этих частей в какую-нибудь клетку другой пересечет участок 1–2, что противоречит условию задачи.) Но для того чтобы попасть на соседнюю клетку каемки, король на некотором шагу должен перейти с клетки одного цвета на клетку другого цвета, т.е. сделать ход либо по вертикали, либо по горизонтали. Отсюда следует, что в пути короля таких ходов не меньше 28.

в) Ясно, что длина пути короля не меньше 64 и такой короткий путь существует (рис.59,б). С другой стороны, мы доказали, что путь короля содержит не меньше 28 отрезков длины 1. Следовательно, король мог сделать не больше $36\sqrt{2}$. (Пример такого пути приведен на рис.59,а.)

185. Поскольку $1 \leq bc/2 \leq b^2/2$, $b \geq \sqrt{2}$.

186. Пусть каждая из двух прямых делит площадь многоугольника M пополам. Тогда в каждом из двух вертикальных углов, образуемых этими прямыми, лежат части многоугольника одинаковой площади (на рисунке 60 это S_1 и S_2).

Рассмотрим вместе с данным многоугольником M симметричный ему относительно точки O многоугольник M' . Если через точку O проходит k прямых, каждая из которых делит площадь пополам, то в каждом из $2k$ углов, на которые k прямых делят плоскость, должна лежать точка пересечения контуров M и M' . Но на каждой стороне многоугольника M не более двух таких точек пересечения. Значит, если M имеет n сторон, то число точек пересечения не меньше $2k$ и не больше $2n$, откуда $k \leq n$.

187. Если $x_2 \geq x_1$, то неравенство вытекает из тождества

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ & = 4(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + \\ & \quad + 4x_5(x_2 - x_1) + 4x_1x_4. \end{aligned}$$

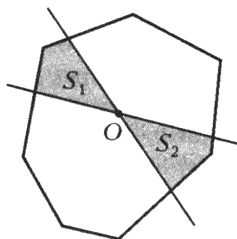


Рис. 60

Если $x_1 > x_2$, то из аналогично доказываемого тождества

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2 = \\ = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5) + 4x_3(x_1 - x_2) + 4x_2x_4. \end{aligned}$$

∀ Вообще неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1)$$

выполнено для следующих (наибольших) c_n : $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$ (причем при этих n неравенство верно для всех x_i , не обязательно положительных), а также для $c_n = 4$ при всех $n \geq 5$ (при $x_i > 0$). Последнее утверждение получается из доказанного для $n = 5$ индукцией: если передвинуть циклически номера так, чтобы x_{n+1} было наименьшим, то

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq \\ \geq -4x_1x_n + 4x_1x_{n+1} + 4x_nx_{n+1}, \end{aligned}$$

поскольку

$$2x_{n+1}(x_2 + \dots + x_{n-1}) + (x_{n+1} - 2x_1)(x_{n+1} - 2x_n) \geq 0.$$

188. Ответ: 29 параллелепипедов.

Можно заметить, что параллелепипед однозначно определяется указанием любой его вершины и тройки «средних» плоскостей (плоскостей, каждая из которых равноудалена от всех его вершин, т.е. проходит через его центр и параллельна граням).

Для четырех данных точек K, L, M и N (не принадлежащих одной плоскости) существует семь плоскостей, равноудаленных от этих точек (они пересекают тетраэдр $KLMN$ в серединах ребер). Из этих семи плоскостей тройку плоскостей можно

выбрать $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ способами.

Но нам нужны лишь тройки плоскостей, пересекающихся в одной точке. Поэтому из 35 нужно исключить те тройки, которые параллельны одной прямой. Таких троек 6: это тройки плоскостей, параллельных одному из 6 ребер тетраэдра. Выбрав одну из $35 - 6 = 29$ троек «средних» плоскостей, мы по данным четырем вершинам однозначно построим параллелепипед – для этого достаточно через эти вершины провести плоскости (грани), параллельные «средним» плоскостям.

В журнале «Квант» (1974, № 5, с. 50) нарисованы все 29 параллелепипедов и приведен также совершенно другой способ подсчета, при котором ответ 29 получается как сумма $1 + 4 + 12 + 12$.

189. Ответ: а) 10 вопросов; б) 11; в) 12; г) 50.

а) Разбиваем 30 чисел на 10 троек и узнаем произведения в этих тройках. Ясно, что меньшим числом вопросов не обойтись, так как каждое число должно входить в какую-нибудь тройку.

б) Произведение первых семи чисел находим, перемножив $a_1a_2a_3$, $a_1a_4a_5$ и $a_1a_6a_7$, а остальные 24 числа разбиваем на тройки, как в пункте а). И в этом случае ясно, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

в) Произведение первых 5 чисел находим, перемножая $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$ и $a_1a_2a_5$, а остальные разбиваем на тройки.

Так как ясно, что всякое число должно входить в некоторую тройку, то вопросов заведомо не меньше 11.

При этом одно из чисел входит ровно в две тройки (если, больше, чем в две, то найдется число, не входящее ни в одну из троек). В произведение всех 11 троек войдет квадрат этого числа и, следовательно, произведение всех чисел мы не узнаем.

г) За 50 вопросов мы узнаем произведения $a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5$, ..., $a_{50}a_1a_2$. Перемножив их, мы получим куб произведения всех чисел, который совпадает с самым этим произведением.

Меньше 50 вопросов недостаточно. Если, например, мы знаем произведение какой-нибудь тройки $a_1a_2a_3$, то существуют два набора с разными произведениями, для которых произведения всех остальных троек совпадают: набор, в котором $a_1 = a_3 = a_6 = a_9 = \dots = a_{48} = 1$, а остальные числа равны -1 , и набор из одних единиц. Все произведения первого набора, кроме $a_1a_2a_3$, равны 1. Во втором наборе все произведения равны 1.

∇ Для n чисел, среди которых можно узнать произведение любых трех, как в задачах а)–в), наименьшее число вопросов равно: k , если $n = 3k$; $k + 1$, если $n = 3k + 1$; $k + 2$, если $n = 3k + 2$. Если же разрешается узнавать лишь произведение трех чисел, выписанных по окружности, то при n , делящемся на 3, надо задать $n/3$ вопросов, а при n , не делящемся на 3, – все n вопросов.

190. Ответ: $11 = 36 - 5^2$.

Последняя цифра числа $36^k = 6^{2k}$ равна 6, последняя цифра числа 5^l равна 5. Поэтому число $|6^{2k} - 5^l|$ оканчивается либо на 1 (если $6^{2k} > 5^l$), либо на 9 (если $6^{2k} < 5^l$).

Равенство $6^{2k} - 5^l = 1$ невозможно, так как тогда было бы $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$, а число $6^k + 1$ не делится на 5. При $k = 1$ и $l = 2$ получим $36^k - 5^l = 11$.

Равенство $5^l - 6^{2k} = 9$ также невозможно, так как 5^l при натуральном l не делится на 3.

191. а) Ответ: не всегда. Пример: если на каждой стороне правильного треугольника со стороной 2 построить равнобедренные треугольники с высотой $1/10$, то все стороны полученного шестиугольника будут больше 1, а все диагонали не больше 2.

б) Ответ: всегда. Из трех диагоналей AD , BE и FC найдутся две, угол α между которыми не меньше 60° . Пусть, например,

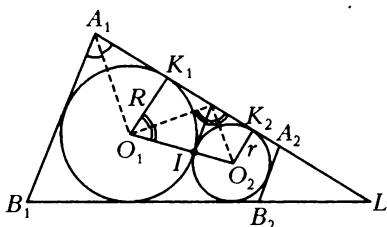


Рис. 61

это AD и BE . Построим параллелограмм $BEDK$. Так как $BE = DK > 2$, $AD > 2$ и $\angle ADK = \alpha \geq 60^\circ$, то $AK > 2$, но $AB + BK \geq AK$. Поэтому либо $AB > 1$, либо $ED = BK > 1$.

192. Из подобия треугольников O_1K_1P и PK_2O_2 (обозначения ясны из рис.61)

получим $K_1P \cdot PK_2 = Rr$, а из подобия $A_1K_1O_1$ и $A_2K_2O_2$ следует, что $A_1K_1 \cdot K_2A_2 = Rr$. Теперь без труда получаем равенство $K_1P = PK_2 = \sqrt{Rr}$, а также неравенство $A_1K_1 + K_2A_2 = 2\sqrt{Rr}$ (среднее арифметическое не меньше среднего геометрического).

Итак, если точка A_2 , для которой $K_2A_2 = \sqrt{Rr}$, лежит между K_2 и L , то длина наименьшей боковой стороны трапеции равна $A_1K_1 + K_1K_2 + K_2A_2 = 4\sqrt{Rr}$. Если же $A_2K_2 \geq K_2L$, т.е. $\sqrt{Rr} \geq \sqrt{Rr} \cdot 2r/(R-r) = q$, $R \geq 3r$, то

$$A_1A_2 > 2\sqrt{Rr} + q + \frac{Rr}{q} = \sqrt{Rr} \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}.$$

Таким образом, если $3r > R$, то минимальная длина боковой стороны равна $4\sqrt{Rr}$.

Если же $3r \leq R$, то трапеции с минимальной длиной боковой стороны нет. При этом можно утверждать, что длина боковой стороны больше

чем $\sqrt{Rr} \frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$ (оценка точная).

193. Отложим все векторы от некоторой точки O .

Докажем, что если уже выбраны k векторов с суммой $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS}$ (рис.62),

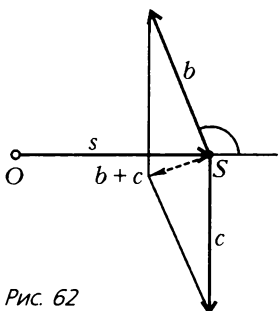


Рис. 62

$|\mathbf{s}| \leq 1$, то из остальных векторов можно выбрать либо один вектор \mathbf{a} , для которого $|\mathbf{s} + \mathbf{a}| \leq 1$, либо два вектора \mathbf{b} и \mathbf{c} , для которых $|\mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| \leq 1$. В самом деле, если среди остальных векторов есть вектор \mathbf{a} , для которого $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \geq 120^\circ$, то $|\mathbf{s} + \mathbf{a}| \leq 1$. Если же такого вектора нет, то, так как по обе стороны от прямой OS есть векторы системы, можно выбрать в качестве \mathbf{b} вектор одной из двух полуплоскостей, образующий наибольший угол с вектором \mathbf{s} . Точно так же в другой полуплоскости выбирается вектор \mathbf{c} . Ясно, что один из углов – $\angle(\mathbf{c}, \mathbf{s})$ или $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{s})$ – тупой, а $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) > 120^\circ$. Пусть, например, $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{s}) > 90^\circ$. Тогда $|\mathbf{s} + \mathbf{b}| < \sqrt{2}$, а $\angle(\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{s}) > 120^\circ$ и поэтому $|\mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| \leq 1$. Таким образом, если присоединять к системе с суммой \mathbf{s} сначала вектор \mathbf{b} , а затем \mathbf{c} , то сумма после каждого шага будет меньше $\sqrt{2}$.

▽ Мы доказали, что в условии 2 можно заменить на $\sqrt{2}$. Более тонкие рассуждения показывают, что всегда можно так занумеровать векторы, что сумма первых из них будет не больше чем $\sqrt{5}/2$, причем эта оценка уже точная: пример $2n + 1$ векторов – один $(-1, 0)$, n штук $(1/n, \sqrt{1 - 1/n^2})$ и n штук $(1/n, -\sqrt{1 - 1/n^2})$ показывает, что константу $\sqrt{5}/2$ нельзя заменить меньшей.

▽ Аналогичную теорему (она называется леммой Штейница) можно доказать и для m -мерного пространства, причем (для любой «нормы» векторов) соответствующая константа Штейница не превосходит m .¹

194. Ответ: два из чисел a, b, c равны 0, третьи ± 1 (всего 6 решений).

Подставляя в условие последовательно: $x = y = z = 1$, затем $x = y = 0, z = 1$, и, наконец, $x = 1, y = -1, z = 0$, получим систему $|a + b + c| = 1, |a| + |b| + |c| = 1, |a - b| + |b - c| + |c - a| = 2$. Так как $|a + b + c| = |a| + |b| + |c|$, то все числа a, b, c одного знака, т.е. $ab \geq 0, bc \geq 0, ac \geq 0$. Однако в неравенстве

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \leq 2|a| + 2|b| + 2|c| = 2$$

(вытекающем из $|a - b| \leq |a| + |b|$ и двух аналогичных) равенство возможно лишь при $ab \leq 0, bc \leq 0, ac \leq 0$. Отсюда $ab = bc = ac = 0$, так что два из чисел a, b, c равны 0, а третье (как видно из любого из трех уравнений) по модулю равно 1.

¹ См. статью Гринберг В.С., Севастьянов С.В. О величине константы Штейница // Функцион. Анализ и его прил. – 1980. – Т. 14, вып. 2.

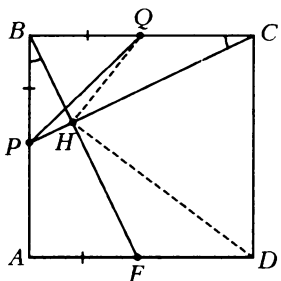


Рис. 63

195. Пусть F — точка пересечения прямых BH и AD (рис.63). Из равенства треугольников ABF и BPC (по катету и острому углу) следует, что $AF = BP = BQ$ и $FD = CQ$; поэтому $QCDF$ — прямоугольник.

Окружность, описанная около него, проходит через точку H (FC — диаметр этой окружности, а $\angle FHC = 90^\circ$). Так как DQ — тоже диаметр, то и $\angle DHQ = 90^\circ$.

196. Для доказательства достаточно заметить, что при перекрашивании любой «особой» точки в другой цвет число отрезков с разноцветными концами уменьшается по крайней мере на 1. Поэтому перекрашивание удастся произвести только конечное число раз, после чего не остается ни одной особой точки.

197. Ответ: $n = k$ и $k = 1, 8$ или 9 .

Если n^n имеет k цифр, а $k^k - n$ цифр, то $10^{k-1} \leq n^n < 10^k$ и $10^{n-1} \leq k^k < 10^n$. Пусть, для определенности, $n \geq k$. Тогда $n^n < 10^n$, т.е. $n < 10$ и $k < 10$. Осталось проверить, что $2^2 < 10$, $3^3 < 100$, $4^4 < 10^3$, $5^5 < 10^4$, $6^6 < 10^5$, $7^7 < 10^6$, $10^7 < 8^8 < 10^8$, $10^8 < 9^9 < 10^9$.

198. Повернем треугольник ABC вокруг вершины C на 90° так, чтобы точка A перешла в B . Тогда E перейдет в точку F прямой AC , для которой $FB \parallel CL \parallel DK$ и $FC = CD$, поэтому $BL = LK$.

199. а) Ответ: можно. При любом положении мышки следует поместить кошек так, чтобы мышка находилась на отрезке между ними, параллельном одной из диагоналей доски, и в ответ на любой ход мышки перемещать кошек так, чтобы мышка по-прежнему была между ними на прямой, параллельной диагонали.

б) Проведем через мышку два отрезка, параллельных диагоналям, и исключим клетки этих отрезков. В одной из четырех оставшихся частей доски кошек нет, и мышка должна идти в эту часть по направлению к краю. Ясно, что кошки не смогут ее поймать, так как после любого хода кошек перед мышкой в направлении ее движения будет свободная от кошек часть доски.

200. а) Чтобы получить требуемую расстановку, в одной половине строки запишем четные числа, а в другой — нечетные. При этом полусумма любых двух чисел из разных половин будет не целой и поэтому не содержится между ними. Затем с первой

и второй половинами сделаем аналогичную процедуру: каждую из них разобьем на две четверти и разместим в них числа вида $4k$, $4k + 2$, $4k + 1$ и $4k + 3$ соответственно: при этом полусумма чисел из разных четвертей в левой половине будет нечетной, а в правой – четной и поэтому не содержится между ними, далее разобьем каждую четверть пополам, причем роль «четных» и «нечетных» чисел теперь будут играть числа с разными остатками от деления на 8 и т.д. В итоге получится такая расстановка:

8, 24, 16, 32, 4, 20, 12, 26, 6, 22, 14, 30, 2, 18, 10, 26,

7, 23, 15, 31, 3, 19, 11, 27, 5, 21, 13, 29, 1, 17, 9, 25.

б) Для того чтобы доказать это утверждение для любого количества N чисел, достаточно доказать его для $N = 2^n$ (лишние числа можно выбросить; например, из расстановки $128 = 2^7$ чисел можно выбросить числа большие 100 и получить нужную расстановку $N = 100$ чисел). Основная идея уже показана в решении а); более формально и коротко можно изложить доказательство как индукции по n .

Для $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно: годятся расстановки $(1, 2)$, $(2, 4, 1, 3)$. Если a_1, a_2, \dots, a_N – расстановка $N = 2^n$ чисел $1, 2, \dots, N$, удовлетворяющая условию, то

$$2a_1, 2a_2, \dots, 2a_N, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \dots, 2a_N - 1$$

будет расстановкой $2N = 2^{n+1}$ чисел $1, 2, \dots, 2N$, также, как нетрудно убедиться, удовлетворяющей условию: для чисел из разных половин – по соображениям четности, для чисел из одной половины – по предположению индукции.

201. Ответ: 15 чисел (111, 222, ..., 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592).

Пусть \overline{abc} – искомое число. Условие задачи означает, что

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 6\overline{abc},$$

откуда $222(a + b + c) = 6(100a + 10b + c)$, или $7a = 3b + 4c$. Это уравнение можно решить перебором всех вариантов (например, полагая последовательно $a = 1, 2, \dots, 9$ и решая затем получившееся уравнение с учетом того, что b и c – цифры). Сократить перебор позволяют соображения делимости. Например, уравнение можно переписать так: $7(a - b) = 4(c - b)$, откуда либо $a = b = c$, либо $a - b = 4$ и $c - b = 7$ (тогда $0 \leq b \leq 2$), либо $b - a = 4$, $b - c = 7$ (тогда $7 \leq b \leq 9$).

202. Рассмотрим множество вершин данного многоугольника P и выберем три из них – A, B, C – так, чтобы площадь

Рис. 64

В Подобное рассуждение уже встречалось в задаче 80, где мы по существу установили, что $\Delta A'B'C'$ –

203. а) Функция f монотонно не убывает на отрезке $[0, 1]$, поскольку из $1 \geq x \geq y \geq 0$ следует $f(x) = f((x-y) + y) \geq f(x-y)f(y) \geq f(y)$. Кроме того, $f(2x) \geq 2f(x)$ при всех x . Пользуясь этим, получаем:

при $\frac{1}{2} < x \leq 1$	$f(x) \leq f(1) \leq 2x;$
при $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}$	$f(x) \leq \frac{1}{2} f(2x) \leq \frac{1}{2} \leq 2x;$
.....	
при $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$	$f(x) \leq \frac{1}{2} f(2x) \leq \frac{1}{2^n} \leq 2x,$
.....	

б) **Ответ:** неверно.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Для этой функции выполнены все условия задачи, но

$$f(0,51) = 1 > 1,9 \cdot 0,51 = 0,969.$$

204. Ответ: $1/8$. Поскольку обозначения ясны из рис.65)

$$\frac{C_1 M_2}{M_2 M_1} \leq \frac{AK}{KC} \leq \frac{AB_1}{B_1 C} = 1,$$

то $C_1 M_2 \leq M_2 M_1$, и поэтому $S_{C_1 M_2 K_1} \leq S_{M_2 M_1 K_1}$. Так же доказывается, что $S_{A L_2 M_1} \leq S_{L_2 L_1 M_1}$ и $S_{B K_2 L_1} \leq S_{K_2 K_1 L_1}$.

Пусть S – площадь общей части треугольников KLM и $A_1 B_1 C_1$. Сложив полученные неравенства, получим

$$S_{A_1 B_1 C_1} - S \leq S_{K_1 M_2 M_1} + S_{M_1 L_2 L_1} + S_{L_1 K_2 K_1} = S - S_{K_1 M_1 L_1} \leq S,$$

откуда $2S \geq S_{A_1 B_1 C_1} = 1/4$, т.е. $S \geq 1/8$. Если точка M совпадает с C_1 , точка L – с C , а K – с A , то $S = 1/8$.

205. Если хорда $Q_1 Q_2$ с центром O получена из хорды $P_1 P_2$ поворотом на угол α вокруг точки O , то точка пересечения R прямых $P_1 P_2$ и $Q_1 Q_2$ может быть получена из середины M хорды $P_1 P_2$ поворотом с центром O на угол $\alpha/2$ (при этом точка M перейдет в некоторую точку M' на отрезке OR) и последующей гомотетией с центром O и коэффициентом $k = 1/\cos(\alpha/2) = OR : OM = OR : OM'$. Применим эти соображения к решению задачи.

а) Треугольник $A_2 B_2 C_2$ получается описанными преобразованиями из треугольника KLM , образованного серединами сторон треугольника ABC . Поскольку $\Delta KLM \sim \Delta A_2 B_2 C_2$ и $\Delta KLM \sim \Delta ABC$, получаем $\Delta ABC \sim \Delta A_2 B_2 C_2$.

б) Четырехугольник из условия задачи получается преобразованием подобия из четырехугольника, образованного серединами сторон четырехугольника $ABCD$. Но середины любых сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

206. Ответ: $1/4$. Прежде всего заметим, что второй игрок может добиться того, что $S_{XYZ} \leq 1/4$ независимо от игры первого. Для этого ему достаточно выбрать Y так, что $XY \parallel AC$ (рис.66). Тогда для лю-

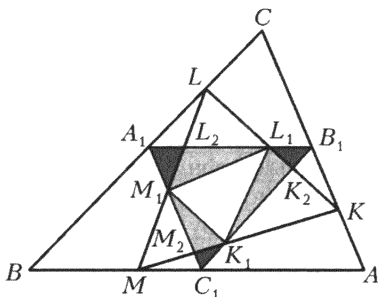


Рис. 65

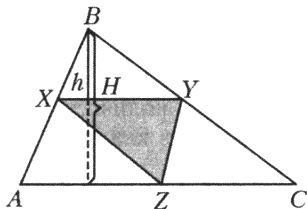


Рис. 66

бой точки Z на основании AC будет выполнено неравенство

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = \frac{XY}{AC} \cdot \frac{H-h}{H} = \frac{h(H-h)}{H^2} \leq \frac{1}{4}.$$

С другой стороны, первый игрок, взяв в качестве X и Z середины сторон AB и AC , обеспечивает себе равенство $S_{XYZ} = 1/4$ независимо от выбора второго.

∇ Более трудна аналогичная задача, где вместо площадей речь идет о периметрах треугольников (см. «Квант», 1976, № 4, с. 32).

207. Ответ: $4 + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{5} + 8\sqrt{10} + 8\sqrt{13}$.

Контур 32-угольника $A_1A_2 \dots A_{32}$ мы представим как изображение суммы 32 векторов $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{32}A_1} = 0$.

Так как из любых 32 различных по направлению векторов с суммой 0 можно составить выпуклый 32-угольник, задача сводится к следующей: найти 32 вектора, удовлетворяющих условиям:

- а) начало и конец каждого вектора лежат в узлах клетчатой бумаги;
- б) любые два вектора имеют разные направления;
- в) сумма всех векторов равна 0;
- г) при выполнении условий а)–в) сумма длин всех векторов минимальна.

Будем откладывать векторы от одной точки. Система 32 векторов, изображенная на рисунке 67, удовлетворяет всем условиям а)–г). Среди этих векторов четыре вектора длины 1 (их нет на рис.67), четыре – $\sqrt{2}$ и по восемь векторов длины $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

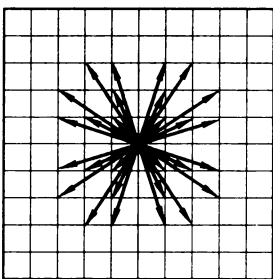


Рис. 67

∇ Аналогичный прием «плотного заполнения уровней» – выбор n четверок различных целочисленных векторов наименьшей длины – позволяет сконструировать $4n$ -угольник минимального периметра с вершинами в узлах.

208. Ответ: а) $k = 21$; б) $k = 52$ (рис.68).

Оценим количество точек, которые можно нужным образом разместить в квадрате $m \times m$.

Пусть x_i – количество точек в строке с номером i и $\sum_{i=1}^m x_i = k$.

Если в некоторой строке отмечены центры каких-то двух

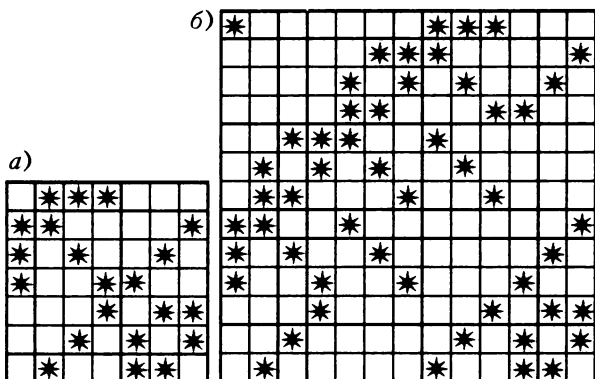


Рис. 68

клеток, то ни в какой другой строке такая же пара клеток не может быть отмечена. Всего в i -й строке отмечено $x_i(x_i - 1)/2$ пар клеток. Так как все отмеченные пары различны, то их суммарное число не больше общего числа возможных пар, т.е.

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i(x_i - 1)}{2} \leq \frac{m(m - 1)}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \leq m(m - 1) + \sum_{i=1}^m x_i = m(m - 1) + k;$$

поскольку $\sum_{i=1}^m x_i^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^2 / m = k^2 / m$, получаем неравенство $k^2 / m \leq m(m - 1) + k$. Из этого неравенства следует, что

$$k \leq \frac{m + m\sqrt{4m - 3}}{2}. \quad (*)$$

При $m = 7$ и $m = 13$ получаем, что $k \leq 21$ и $k \leq 52$ соответственно.

▽ Самое загадочное в решении этой задачи – примеры, реализующие точную оценку. (Участниками олимпиады они были найдены подбором, с помощью каких-то соображений симметрии.) Укажем способ их построения. В примере а) в качестве «номеров» строк (а также столбцов) используем тройки из чисел 0 и 1, отличные от (0; 0; 0). Их как раз 7: (1; 1; 1), (1; 1; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечаем, если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ четно. В примере б) в качестве

«номеров» строк и столбцов используем тройки из чисел 0, 1 и -1 , отличные от $(0; 0; 0)$, причем из двух троек, получающихся одна из другой умножением на -1 , используется лишь одна. Их как раз 13: $(1; 1; 1)$, три перестановки $(1; 1; 0)$, три перестановки $(1; 1; -1)$, три перестановки $(1; -1; 0)$ и три перестановки $(1; 0; 0)$. Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечаем, если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ делится на 3.

Это – конструкции конечных проективных плоскостей над полем из $p = 2$ и $p = 3$ элементов: столбцам соответствуют точки, строкам – прямые проективной плоскости, а требуемое в условии свойство таблицы сводится к тому, что через каждые две точки проходит одна прямая и каждые две прямые пересекаются в одной точке (прямая (a_1, a_2, a_3) содержит точку (x_1, x_2, x_3) , если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ равно 0 по модулю p).

Можно убедиться, что неравенство $(*)$ превращается в равенство лишь при $m = p^2 + p + 1$, где p – натуральное число; при этом $k = (p+1)(p^2 + p + 1)$. Вопрос о том, существует ли для таких m и k соответствующая таблица, очень сложен: он сводится к (нерешенной в общем виде) проблеме существования конечных проективных плоскостей порядка p ; во всяком случае, при p простом (или равном степени простого числа) ответ на этот вопрос положителен.

209. Площадь четырехугольника $B_1B_4B_5B_6$ (рис.69) равна четверти площади четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ поскольку диагонали его B_1B_5 и B_4B_6 параллельны диагоналям A_2A_4 и A_1A_3

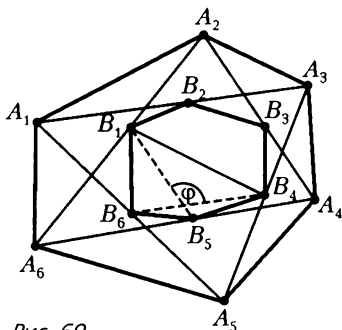


Рис. 69

и равны их половинам, а площадь выпуклого четырехугольника выражается формулой $S = d_1d_2 \sin \varphi / 2$, где d_1 и d_2 – длины его диагоналей, φ – угол между ними. Точно так же площадь $B_1B_2B_3B_4$ равна четверти площади $A_1A_4A_5A_6$.

210. При $n = 1$ четыре числа 11, 21, 12, 22 удовлетворяют условию. Докажем утверждение задачи по индукции.

Обозначим через a' число, полученное из a заменой цифр 1 на 2 и 2 на 1, а через ab – число, полученное приписыванием к a числа b . Пусть построено множество A^n из 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n -значно, причем каждые 2 из чисел отличаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах. Рассмотрим множество A_{n+1} состоя-

щее из чисел aa и aa' , где $a \in A_n$. Все такие числа 2^{n+1} -значны, всего их 2^{n+2} . Кроме того, любые два из них отличаются не менее чем в 2^n разрядах. В самом деле, числа aa и aa' , а также числа aa и bb' при любых a и b отличаются ровно в 2^n разрядах (в тех разрядах, где a и b отличаются, a' и b' совпадают, и наоборот); числа aa и bb по предположению индукции отличаются не менее чем в 2^n разрядах. Утверждение доказано.

211. Спроектируем все многоугольники на некоторую прямую. Проекция каждого многоугольника является отрезком, причем по условию любые два отрезка имеют общую точку. Отсюда следует, что все отрезки имеют общую точку (чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть данную прямую как числовую ось и взять наименьший из правых концов этих отрезков). Прямая, перпендикулярная к данной и проходящая через отмеченную точку, пересекает все многоугольники.

212. Без ограничения общности можно считать, что $a \geq b \geq c$. Тогда $c(a-c)(b-c) \geq 0$, откуда $c^3 + abc \geq ac^2 + bc^2$. Достаточно доказать, что $a^3 + b^3 + 2abc \geq ab(a+b) + a^2c + b^2c$. Последнее неравенство преобразуется к виду $(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$.

✓ Легко видеть, что равенство в данном неравенстве возможно лишь при $a = b = c$.

213. Если одна из мух находится в вершине A , то центр тяжести треугольника, образованного мухами, находится в треугольнике ADE (рис. 70), где $DE : BC = 2 : 3$. Так как одна из мух побывала во всех вершинах, то центр тяжести «треугольника мух» должен принадлежать трем треугольникам, заштрихованным на рисунке. Единственная общая точка этих треугольников – центр тяжести данного.

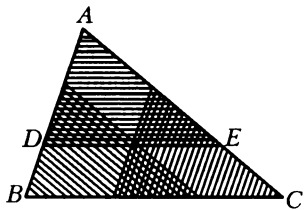


Рис. 70

214. Пусть p – число нулей, q – число единиц, r – число двоек. После каждой операции все три числа p , q и r изменяются на 1, тем самым меняют четность. Когда на доске останется одна цифра, одно из чисел p , q и r станет равно 1, два другие – 0. Следовательно, вначале четность одного из этих чисел была отлична от четности двух других. Соответствующая цифра и останется на доске.

215. Пусть A_1, A_2, \dots, A_n – точки пересечения прямых с нижней кромкой полосы, занумерованные по порядку (слева направо), B_1, B_2, \dots, B_n – точки пересечения с верхней кромкой

(также слева направо). Занумеруем пути, выходящие из точек A_1, A_2, \dots, A_n , по порядку числами $1, 2, \dots, n$. Из правил построения путей вытекают следующие свойства.

1° По каждому отрезку каждой прямой проходит ровно один путь.

2° Соседние пути – k -й и $(k + 1)$ -й – соприкасаются вершинами, причем k -й всюду идет левее $(k + 1)$ -го (для каждого $k = 1, 2, \dots, n - 1$). Несоседние пути вообще не имеют общих точек.

3° k -й путь оканчивается в точке B_k .

Теперь докажем все утверждения задачи.

а) Рассмотрим все пути с нечетными номерами. По свойству 1° они не могут иметь общих точек, а их число не меньше $n/2$.

б) Подсчитаем двумя способами общее количество отрезков на всех путях. Каждый из отрезков $A_i B_{n+1-i}$ одной из прямых разбивается точками пересечения с остальными прямыми на n отрезков. Поэтому всего отрезков n^2 . Ту же сумму n^2 согласно 1° мы должны получить, сложив количества отрезков во всех n путях. Поэтому по крайней мере одно из слагаемых будет не меньше n .

Конечно, утверждение б) следует также из г).

в) Оценим количество отрезков в двух *крайних* путях – 1-м и n -м.

Эти пути ограничивают выпуклые множества, лежащие левее 1-го и правее n -го пути; первый путь лежит внутри угла $A_1 P B_1$, а второй внутри угла $A_n P B_n$, где P – точка пересечения прямых $A_1 B_n$ и $A_n B_1$. Остальные прямые $A_2 B_{n-1}, A_3 B_{n-2}, \dots, A_{n-1} B_2$ могут иметь общий отрезок только с одним из двух крайних путей (а именно с тем из них, который лежит по другую сторону от этой прямой, чем точка P). Итак, всего в двух крайних путях не больше чем $4 + (n - 2)$ отрезков. Поэтому в одном из них не больше чем $\frac{n}{2} + 1$ отрезков.

г) Рассмотрим *средний* путь, т.е. путь с номером $m = (n + 1)/2$, если n нечетно, и $m = n/2$, если n четно, и

докажем, что он проходит, по всем прямым (рис.71). В самом деле, он делит полосу на две области: каждый из отрезков $A_i B_n, A_2 B_{n-1}, \dots, A_n B_1$ начинается в одной из областей (может быть, на границе) и кончается в другой и, следовательно, имеет со средним

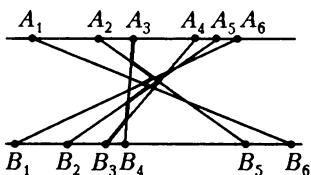


Рис. 71

путем общую точку, поэтому (по правилу построения путей) – и общий отрезок.

▽ В этой задаче было бы интересно получить хорошие оценки снизу и сверху для количества отрезков максимального по числу отрезков) пути.

216. Ответ: при четном k можно, при нечетном – нельзя.

Для четного k легко построить пример: можно изготовить куб из чередующихся черных и белых блоков $2 \times 2 \times 1$.

Предположим теперь, что нам удалось составить нужный куб при нечетном k . Соединим отрезками центры соседних белых кубиков. Из каждого центра выходят 2 отрезка. Такая система отрезков образует одну или несколько замкнутых ломаных. Заметим, что число звеньев у замкнутой ломаной, составленной из отрезков одинаковой длины и трех попарно перпендикулярных направлений, четно (четно даже число звеньев каждого из направлений). Таким образом, число белых кубиков четно. Так же доказывается четность числа черных кубиков. Противоречие.

217. а) В качестве такого числа S можно взять сумму всех цифр в записи всех коэффициентов многочлена $P(x)$: тогда для любого $n \geq n_0$, где n_0 выбрано так, что 10^{n_0} больше всех коэффициентов, $a_{10^n} = S$.

б) Результат а) можно применить к многочлену $Q(x) = P(x + d)$, где d – большое натуральное число; при этом получится, что при достаточно большом $n_0 = n_0(d)$ для любого $n \geq n_0$ сумма всех цифр числа $Q(10^n) = a_{10^n+d}$ одна и та же. Конечно, нужно проверить условие, что все коэффициенты $Q(x)$ одного знака.

При достаточно большом $d > 0$ коэффициенты многочлена $Q(x) = P(x + d)$ имеют тот же знак, что и старший коэффициент многочлена $P(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$. Наметим два пути доказательства.

1° Коэффициенты многочлена

$$\begin{aligned} Q(x) &= p_0(x+d)^n + p_1(x+d)^{n-1} + \dots + p_n = \\ &= p_0(x^n + C_n^1 x^{n-1}d + \dots + C_n^{n-1} x d^{n-1} + d^n) + \\ &+ p_1(x^{n-1} + C_{n-1}^1 x^{n-2}d + \dots + d^{n-1}) + \dots + p_n = \\ &= q_0x^n + q_1(d)x^{n-1} + \dots + q_n(d), \end{aligned}$$

где $q_k(d)$, $k = 0, 1, \dots, m$, – многочлены от d , причем $q_k(d)$ имеет степень k и старший член $p_0 C_n^k d^k$ (а q_0 просто равняется p_0).

Тогда при достаточно большом $d > d_0$ каждый $q_k(d)$ будет иметь тот же знак, что и p_0 .

2°. Если у многочлена $P(x)$ первые несколько коэффициентов p_0, p_1, \dots, p_{n-k} имеют один и тот же знак, то при сдвиге $P(x) \rightarrow (x+d) = Q(x)$ на d из него получится многочлен, у которого коэффициенты q_0, q_1, \dots, q_{n-k} имеют тот же знак, и следующий коэффициент

$$q_{n-k+1} = p_0 C_n^{n-k+1} d^{n-k+1} + p_1 C_{n-1}^{n-k} d^{n-k} + \dots + p_{n-k} d + p_{n-k+1}$$

при достаточно большом d будет иметь тот же знак. Таким образом, за $n-1$ сдвиг мы можем получить из любого многочлена $P(x)$ такой, у которого все коэффициенты имеют тот же знак, что и p_0 .

∇ Здесь использовался лишь тот факт, что числа C_n^k — коэффициенты бинома $(a+b)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ (см. П6) — положительны.

218. Мы рассмотрим сразу случай n команд — участников чемпионата мира.

а) **Ответ:** $k = n - 2$, если $n \geq 3$ (в частности, при $n = 20$ получим $k = 18$).

Общее количество очков, разыгрываемых в чемпионате мира (за победу — 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0), равно $n(n-1)$, в чемпионате Европы — $k(k-1)$.

Пусть x — количество очков, набранных чемпионом Европы в играх чемпионата мира, а y — количество очков, полученные им в играх с европейскими командами, $x \geq y$. Пусть каждая из остальных команд набрала в играх чемпионата мира больше чем x очков, т.е. не меньше чем $x + 1$ очко. Тогда $x + (n-1)(x+1) \leq n(n-1)$, или $x \leq n - 2 + \frac{1}{n}$, а так как x — целое число, то $x \leq n - 2$.

Каждая из остальных европейских команд набрала не больше $y - 1$ очков в чемпионате Европы и потому $y + (y-1)(k-1) \geq k(k-1)$, или $y \geq k - \frac{1}{k}$, а поскольку y — целое число, $y \geq k$. Итак, $k \leq y \leq x \leq n - 2$, т.е. $k \leq n - 2$.

На рисунке 72,а приведен пример турнирной таблицы, показывающий, что чемпион Европы (третья команда) может занять последнее место в чемпионате мира.

б) **Ответ:** $k = n - 5$ при четном $n \geq 8$ (в частности, $k = 15$ при $n = 20$), $k = n - 4$ при нечетном $n \geq 7$; $k = 2$ при $n = 6$ и $n = 5$.

Рис.72. а) Чемпионат по хоккею; n команд, $k = n - 2$. Команды 3, ..., n – европейские, команда 3 – чемпион Европы. б) Чемпионат по волейболу; $n = 8$, $k = 3$. Команды 6, 7, 8 – европейские, команда 6 – чемпион Европы. Добавлены команды А и Б. в) Чемпионат по волейболу; $n = 7$, $k = 3$. Команды 5, 6, 7 – европейские, команда 5 – чемпион Европы. Добавлены команды А и Б. г) Чемпионат по волейболу; $n = 6$, $k = 2$. д) Чемпионат по волейболу; $n = 5$, $k = 2$.

Рассуждая, как и выше, получим (x, y) – те же, что и в случае а))

$$y + (k-1)(y-1) \geq k(k-1)/2. \quad (2)$$

Из неравенств $l - 2 \geq x \geq y$ и неравенства (2) следует, что

При $l \geq 4$ наибольшее целое k , удовлетворяющее неравенству (3), равно $2l - 5$ (при $k = 2l - 5$ неравенство (3) справедливо, а при $k = 2l - 4$ его левая часть положительна).

Теперь докажем, что равенство $k = 2l - 5 = n - 5$ при $l \geq 4$ возможно. На рисунке 72, в приведена турнирная таблица для $n = 8$, $k = 3$ (последние 3 команды – европейские). Эта таблица послужит началом индукции.

Дальнейшие построения проводим по индукции, добавляя на каждом шагу по 2 европейские команды.

Заметим прежде всего, что при $k = 2l - 5$ непременно $x = y = l - y$. В самом деле,

$$y \geq \frac{(k-1)(k+2)}{2k} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \text{ или } y \geq l - 2 - \frac{1}{2(2l-5)},$$

а так как y – целое число, то $y = l - 2 = x$. Это значит, что чемпион Европы проиграл всем неевропейским командам.

Теперь предположим, что уже реализована таблица чемпионата с $k = n - 5 = 2l - 5$. Добавим две европейские команды A и B по следующему правилу: команда A выигрывает у старых команд с нечетными номерами и у команды B и проигрывает остальным; команда B выигрывает у команд с четными номерами и проигрывает остальным. Каждая из прежних команд получает в результате по одному очку, так что их взаимное положение не меняется.

У чемпиона Европы теперь $l - 1$ очко, у команды $A - l + 1$ очко; у команды $B - l$ очков, так что старый чемпион Европы по-прежнему на последнем месте. В играх же с европейскими командами команда A наберет $l - 2$ очка ($l - 3$ в играх со «старыми» командами и одно – с командой B); команда B в играх с европейскими командами также наберет $l - 2$ очка, так что чемпион Европы останется прежним.

Случай нечетных $n = 2l - 1$ при $l \geq 4$, а также $n \leq 6$ рассматриваются аналогично (рис. 72, в, г, д).

219. а) Отметим два наибольших числа из четырех, составляющих таблицу 2×2 . Если они стоят в одном столбце, то искомым числом является меньшее из них, а если они стоят в одной строке, то – большее из других двух чисел (при этом допускаются и нестрогие неравенства).

Остается случай, когда два отмеченных числа стоят по диагонали (и строго больше двух других), но этот случай невозможен. Проще всего убедиться в этом, опираясь на тот факт, что дробь $(c + d)/(p + q)$ всегда лежит между c/p и d/q (при $p > 0$, $q > 0$; рис. 73 дает этому факту геометрическую

интерпретацию). Из него следует, что $\frac{a_1 + b_1 + a_2 + b_2}{p_1 + q_1 + p_2 + q_2}$ лежит между $\frac{a_1 + b_1}{p_1 + q_1}$ и $\frac{a_2 + b_2}{p_2 + q_2}$, а также между $\frac{a_1 + b_2}{p_1 + q_2}$ и $\frac{a_2 + b_1}{p_2 + q_1}$, поэтому два наибольшие и два наименьшие числа в нашей таблице не могут стоять по диагоналям.

б) Дадим два решения этой задачи, одно – независимое от а) и, тем самым, дающее новое решение этого частного случая, а другое – использующее а) как лемму.

Первое решение. Мы должны указать такое число $x^* = \frac{a_k + b_l}{p_k + q_l}$ в нашей табли-

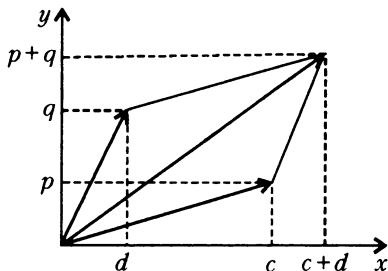


Рис. 73

це $m \times n$, что выполнены условия $\frac{a_k + b_j}{p_k + q_j} \leq x^*$ (для всех j), $\frac{a_i + b_l}{p_i + q_l} \geq x^*$ (для всех i); перепишем эти условия так:

$$p_k x^* - a_k \geq -q_j x^* + b_j, \quad p_i x^* - a_i \leq -q_l x^* + b_l. \quad (*)$$

Рассмотрим кусочно-линейные функции $f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} (p_i x - a_i)$ и $g(x) = \max_{1 \leq j \leq n} (-q_j x + b_j)$, график каждой функции состоит из отрезков прямых и двух лучей. Первая – монотонно возрастает, вторая – убывает, и потому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение (x^*, y^*) (точка (x^*, y^*) , где $y^* = f(x^*) = g(x^*)$ – самая высокая из точек пересечения прямых $y = p_i x - a_i$ с прямыми $y = -q_j x + b_j$, рис.74). Примем за k и l номера тех линейных функций $y = p_k x - a_k$ и $y = -q_l x + b_l$, пересечение графиков которых дает точку (x^*, y^*) , т.е. тех, для которых

$$p_k x^* - a_k = \max_{1 \leq i \leq m} (p_i x^* - a_i) = y^* = -q_l x^* + b_l = \max_{1 \leq j \leq n} (-q_j x^* + b_j).$$

Для указанных k, l и x^* , выполнены все нужные условия (*).

Второе решение основано на таком замечательном наблюдении. Будем говорить, что таблица имеет «седло», если у нее есть

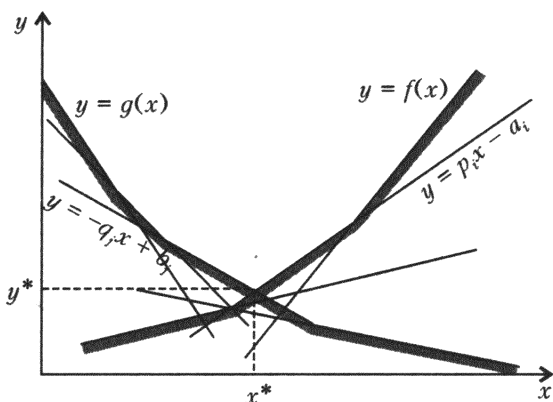


Рис. 74

элемент, который не меньше всех в своей строке и не больше всех в своем столбце.

Лемма. Если каждая таблица 2×2 , полученная из данной таблицы $m \times n$ вычеркиванием $m - 2$ строк и $n - 2$ столбцов, имеет седло, то этим свойством обладает и вся таблица $m \times n$.

Эта лемма сводит задачу б) к частному случаю а).

Докажем лемму. Предположим, что существует таблица, у которой нет седла, но любая подтаблица 2×2 имеет седло. Отметим в i -й строке этой таблицы некоторое наибольшее число

M_i , а в j -м столбце – наименьшее m_j . Построим из отмеченных чисел цепочку, переходя от некоторого наибольшего числа в строке к наименьшему в его столбце, а от него – к наибольшему в его строке, и т.д. Такая цепочка не может окончиться на каком-то одном элементе (так как таблица не имеет седла), поэтому

она должна содержать цикл; заменив номера, т.е. переставив строки и столбцы надлежащим образом, мы можем считать, что этот цикл состоит из элементов $M_1 = x_{11}$, $m_1 = x_{21}$, $M_2 = x_{22}$, $m_2 = x_{32}$, ..., $m_r = x_{rr-1}$, $M_r = x_{rr}$, $m_r = x_{1r}$ (рис.75), причем $M_1 = \min_{1 \leq i \leq r} M_i$. Поскольку таблицу 2×2 в левом верхнем углу имеет седло, причем $m_1 < M_1 \leq M_2$, $m_1 < M_2$ и $x_{12} \leq M_1$, должно быть $M_1 = x_{12} \leq M_2$. Аналогично можно показать (рассматривая таблицы 2×2 с нижними строчками (m_2, M_3) , (m_3, M_4) , ...), что все элементы первой строки равны M_1 :

$x_{11} = x_{12} = x_{13} = \dots = x_{1r} = M_1$. Тогда $x_{1r} = m_r$ – седловая точка. Получили противоречие.

∇ Интересно отметить, что членам жюри заранее было известно несколько разных решений задачи б), но последнее из приведенных выше – использующее пункт а) и лемму – они обнаружили лишь проверяя работы школьников на олимпиаде.

Темы, указанные в путеводителе, объединяют задачи по разным признакам: по методу, используемому в решении, либо по объекту, фигурирующему в условии.

1. Метод индукции

Метод доказательства некоторого утверждения для любого натурального n основан на следующем принципе: если утверждение верно для $n = 1$ и из справедливости его для $n = k$ вытекает справедливость этого утверждения для $n = k + 1$, то оно верно для всех n (*принцип математической индукции*). Часто доказательство по индукции имеет форму «спуска»: доказательство утверждения для некоторого n сводится к тому, что утверждение верно для некоторого меньшего значения $n_1 < n$; здесь используется принцип индукции в такой форме: если утверждение верно для $n = 1$ и (при $n > 1$) из справедливости его для всех $k < n$ следует справедливость для $k = n$, то утверждение верно для всех n . Иногда удобно начать индукцию не с $n = 1$, а с $n = 0$ или с некоторого $n = n_0$. Принцип индукции эквивалентен такой аксиоме: в любом множестве натуральных чисел есть наименьшее (см. задачу 11).

Часто метод индукции присутствует в доказательстве неявно. Например, доказательство тождества

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

по индукции сводится к проверке его для $n = 1$ и выкладке («шагу индукции»): если $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$, то

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

По существу то же доказательство можно записать так (собрав мысленно первые n шагов индукции вместе):

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) &= \\ &= 1 + (4 - 1) + (9 - 4) + \dots + \left((n + 1)^2 - n^2\right) = (n + 1)^2. \end{aligned}$$

№ 5, 15, 26, 36, 39, 52, 72, 76, 77, 90, 97, 100, 102, ПО, 113, 120, 137, 142, 144, 148, 164, 176, 179, 181, 183, 193, 203, 210, 218.

Выделим еще задачи со специфической идеей многократного деления пополам (или удвоения).

№ 155, 200.

2. Целые числа. Делимость

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Каждое целое число a можно разделить на натуральное число m с остатком, т.е. представить в виде $a = mq + r$, где q и r (остаток) – целые числа и $0 \leq r < m$.

Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m . Если два числа a и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что a сравнимо с b по модулю m . Записывают это так: $a \equiv b \pmod{m}$.

Если a и b – натуральные числа и $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$), то наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r ; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с остатком:

$$\begin{aligned} a &= bq + r, b = r_1q_1 + r_1, r = r_1q_2 + r_2, r_1 = \\ &= r_2q_3 + r_3, \dots, r_{n-1} = r_nq_{n+1} + d, r_n = dq_{n+2} \end{aligned}$$

(алгоритм Евклида); отсюда следует, что существуют целые числа x и y , такие, что $d = ax + by$. В частности, если числа a и b взаимно просты, т.е. не имеют общих множителей, больших 1, то существуют целые x и y , для которых $ax + by = 1$ (см. задачу 68).

Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых (*основная теорема арифметики*). Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.

Если числа b_1, b_2, \dots, b_n попарно взаимно просты, то для любых остатков r_1, r_2, \dots, r_n ($0 \leq r_i < b_i$) найдется число a , которое при делении на b_i дает остаток r_i , т.е. $a \equiv r_i \pmod{b_i}$ при $i = 1, 2, \dots, n$ (*китайская теорема об остатках*).

№ 3, 9, 16, 30, 36, 42, 46, 48, 51, 59, 68, 74, 85, 88, 89, 93, 102, 107, 122, 137, 141, 162, 190.

3. Цифры и системы счисления

В задачах, где речь идет о цифрах в десятичной записи натурального числа $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (эта запись иногда обозначается через $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$), используются разнообразные соображения: делимость целых чисел, алгебраические преобразования, оценки. В частности, полезен признак делимости на 3 и на 9, а также следующее его уточнение: число $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ дает при делении на 9 (и на 3) тот же остаток, что и его сумма цифр (разность

$$\begin{aligned} A - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) &= \\ &= a_n (10^n - 1) + a_{n-1} (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 (10 - 1), \end{aligned}$$

очевидно, делится на 9).

Иногда оказывается, полезной запись натурального числа A в системе счисления с основанием q :

$$A = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0,$$

где $a_i, 0 \leq a_i < q$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – «цифры» этой системы счисления.

№ 3, 21, 43, 54, 85, 88, 93, 122, 132, 139, 141, 142, 144, 148, 168, 175, 197, 201.

4. Числа рациональные и иррациональные

Рациональное число a представимо в виде $a = m/n$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, а также в виде периодической бесконечной десятичной (q -ичной) дроби. Десятичные (q -ичные) дроби, представляющие *иррациональные* числа, не периодичны.

Вместе с иррациональным числом $a + b\sqrt{d}$ (где a и b – рациональные числа, d – целое, не являющееся квадратом натурального числа) полезно рассмотреть «сопряженное» с ним число $a - b\sqrt{d}$: его сумма и произведение с исходным – рациональные числа, так что $a \pm b\sqrt{d}$ являются корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

№ 94, 114.

5. Квадратный трехчлен. Непрерывные функции, графики и корни уравнений

В большинстве задач, сводящихся к исследованию квадратичной функции $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, полезно представить себе ее график. Если он пересекает ось Ox в двух точках

(корнях) x_1 и x_2 , то между корнями значения функций $y = f(x)$ противоположны по знаку числу a , а вне отрезка $[x_1, x_2]$ – совпадают по знаку с числом a . При этом вершина параболы $y = f(x)$ (абсцисса которой равна полусумме корней) соответствует точке экстремума функции $y = f(x)$: минимума, если $a > 0$, и максимума, если $a < 0$.

В ряде задач полезно использовать такой факт: если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает в концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками a и b лежит хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

№ 32, 119, 149, 157, 178, 180, 206.

6. Алгебра многочленов

Многочлен $P(x)$, имеющий число a корнем, делится на двучлен $x - a$, т.е. представляется в виде $P(x) = (x - a)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен на единицу меньшей степени (при этом, если $P(x)$ имеет целые коэффициенты, то и $Q(x)$ – тоже). Многочлен степени n имеет не более n корней (даже с учетом кратности). Отсюда следует, что если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени не большей n принимают одинаковые значения более чем в n точках, то их коэффициенты при соответствующих степенях равны.

Часто используются тождества для многочленов с двумя переменными x и y :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

$$x^{2m+1} + y^{2m+1} = (x + y)(x^{2m} - x^{2m-1}y + x^{2m-2}y^2 - \dots - xy^{2m-1} + y^{2m}),$$

а также формула «бинома Ньютона»

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n,$$

где биномиальные коэффициенты вычисляются по формулам

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

№ 16, 24, 38, 51, 125, 142, 162, 217.

7. Тождества. Уравнения и системы уравнений

При решении и исследовании уравнений, помимо обычных «школьных» методов (подстановки, замены переменной, преобразования), иногда используются соображения моно-

тонности: если функция $y = f(t)$ строго возрастает или строго убывает, то уравнения $f(g_1) = f(g_2)$ и $g_1 = g_2$ равносильны. При решении систем уравнений иногда бывают полезны геометрическая интерпретация, соображения симметрии и т.д.

Ряд задач связан с линейными соотношениями между несколькими переменными.

№ 38, 63, 98, 146, 189, 194.

8. Неравенства

Среди часто используемых неравенств отметим следующие:

$$1) |x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \geq |x| - |y|;$$

$$2) \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{для любых } a \geq 0, b \geq 0;$$

3) если a_1, a_2, \dots, a_n — неотрицательные числа, то

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим);

$$4) (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) / n \quad (\text{для любых } a_1, a_2, \dots, a_n);$$

5) для положительных чисел a, b дробь $\frac{c+d}{a+b}$ заключена между дробями $\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{d}$ (см. задачу 219).

$$6) \sin x < x \text{ при } x > 0.$$

№ 19, 56, 95, 109, 113, 118, 127, 128, 130, 134, 169, 172, 187, 203, 208, 212.

9. Принцип Дирихле

Если в k клетках больше nk зайцев, то хотя бы в одной клетке сидит больше n зайцев. Подобные соображения используются в разных задачах для доказательства существования [65].

Приведем еще несколько похожих на «принцип Дирихле» (и столь же очевидных) утверждений, используемых в геометрических и аналитических задачах. Если сумма площадей нескольких фигур меньше S , то ими нельзя покрыть фигуру площади S . Если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммой длин L , то найдется точка, покрытая не более чем $[L]$

этими отрезками. Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a , то хотя бы одно из этих чисел больше a .

№ 3, 4, 12, 37, 67, 72, 78, 87, 91, 110, 166.

10. Комбинаторика

Основной прием в задачах на подсчет числа различных комбинаций элементов конечного множества – установление соответствия между множествами, заданными различными условиями.

В частности, множество всех упорядоченных наборов из n единиц и нулей – всего таких наборов 2^n – может быть поставлено в соответствие множеству всех подмножеств данного множества из n элементов. Множество таких наборов, содержащих k единиц, соответствует множеству всех элементарных подмножеств n -элементного множества. Всего таких наборов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

При $n = 2$ это – число неупорядоченных пар элементов из данного множества: $C_n^2 = n(n-1)/2$.

Число перестановок (упорядочений) данного множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

№ 52, 61, 76, 117, 136, 210.

11. Графы, отображения

Изображая элементы некоторого множества точками и соединяя некоторые пары точек отрезками, мы получаем наглядное представление для очень популярного объекта дискретной математики. Он называется *графом*; точки (элементы множества) называются *вершинами*, отрезки (или дуги) – *ребрами* графа. Граф, из любой вершины которого можно пройти в любую другую путем, состоящим из ребер, называется *связным*. Замкнутый путь по ребрам графа называется *циклом*. Связный граф без циклов – *дерево* – имеет вершин на одну больше, чем ребер (см. задачу 8). Если все циклы графа имеют четную длину, то его вершины можно раскрасить в два цвета так, что вершины одного цвета не соединены ни одним ребром; такой граф называется *двудольным*.

Если на ребрах графа расставить стрелки, то получится ориентированный граф (*орграф*). Любое отображение f конечного множества A в себя задает орграф, из каждой вершин $a \in A$ которого выходит одна стрелка – в вершину $f(a)$. (При этом

возможны и петли – стрелки, идущие из a в a ; они соответствуют неподвижным точкам отображения f .) Если f взаимно однозначно, то оргграф распадается на циклы (и петли).

Один из примеров сложного графа – схема телефонной сети (см. задачу 158).

Рассматриваются также графы, ребра или вершины которых раскрашены в несколько цветов, или помечены числами.

№ 8, 72, 79, 111, 123, 126, 163, 176, 183, 196.

12. Четность, раскраска. Задачи на решетках

В задачах про графы часто важны соображения четности. Например, число вершин, к которым примыкает нечетное число ребер, всегда четно (см. также задачу 1). Соображения подобного рода полезны и в других задачах; например, для решения классической задачи: можно ли шахматную доску 8×8 клеток без двух клеток в противоположных углах покрыть «доминошками» 1×2 – достаточно заметить, что каждая доминошка покрывает две клетки разного цвета (при обычной шахматной раскраске), а угловые клетки – одного цвета. Бывает полезна и раскраска в большее число цветов.

№ 1, 17, 33, 49, 61, 72, 85, 132, 133, 142, 143, 154, 184.

Помимо четности или раскраски, в задачах на клетчатой бумаге и других плоских и пространственных решетках также нередко используются различные геометрические и комбинаторные соображения, метод координат. Бывает полезно рассмотреть клетчатую бумагу как числовую плоскость, на которой узлы решетки – точки с целочисленными координатами, или квадрат из p^2 узлов, координаты которых – пары остатков (x, y) при делении на p .

№ 91, 96, 111, 181, 199, 207, 208.

13. Операции и инварианты

В задачах, где требуется выяснить, можно ли с помощью заданных операций перейти от одного из объектов к другому, часто полезно найти «инвариант» – числовую характеристику объектов (или функцию с какими-то другими значениями на множестве объектов), которая не меняется при указанных операциях. Если при этом значение инварианта на двух объектах различно, то превратить один в другой нельзя. В целочисленных и других «дискретных» задачах инвариантом часто служит остаток от деления на 2 (четность) или на другое натуральное число.

Если все выполняемые операции обратимы, то все множество объектов, над которыми они выполняются, разбивается на классы эквивалентности (два объекта эквивалентны, если один из них может быть получен из другого заданными операциями).

№ 105, 154, 214.

В задачах, где требуется оценить количество операций или доказать, что их нельзя проделывать бесконечное число раз (скажем, убедиться в отсутствии «цикла»), иногда бывает полезно придумать функцию, которая при каждой операции возрастает (или при каждой операции убывает).

№ 5, 7, 21, 44, 151, 196.

14. Расстановки цифр и целых чисел, их преобразования. Турниры

В решениях задач о конечных последовательностях из целых чисел, букв, фишек, расстановках их по окружности или в таблице сочетаются различные соображения, связанные с делимостью, комбинаторикой, оценками, использующими индукцию.

№ 4, 37, 39, 87, 117, 143, 154, 156, 181, 200.

Задачи о турнирах, набранных очках и занятых участниками местах, объединенные спортивной тематикой:

№ 28, 108, 126, 179, 218.

15. Планиметрия

Почти в каждом варианте олимпиадных задач встречается традиционная школьная, хотя и не простая, задача по геометрии. Среди наиболее распространенных геометрических теорем, используемых для их решения, отметим следующие. Угол между касательной и секущей окружности равен полуразности величин дуг, заключенных между сторонами угла; квадрат длины касательной равен произведению отрезков секущей от вершины угла до точек ее пересечения с окружностью. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны; четырехугольник описан около окружности, если и только если суммы противоположных сторон равны. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус окружности,

№ 2, 13, 35, 50, 55, 58, 69, 84, 92, 103, 104, 106, 112, 114, 115, 129, 138, 145, 152, 159, 165, 166, 170, 177, 182, 195, 198, 209.

В отдельные группы выделим задачи

а) о правильных многоугольниках:

№ 20, 99, 103, 127;

б) использующие понятие «геометрического места» (множества) точек:

№ 6, 12, 14, 18, 20, 31, 40, 60, 69, 78, 82, 157, 202, 207, 213;

г) на применение геометрических преобразований (поворотов, параллельных переносов, подобий и их композиций):

№ 6, 22, 45, 47, 73, 101, 112, 140, 147, 165, 182, 198, 205;

д) задачи, в которых речь идет о площади фигур (или, как нередко бывает, площадь служит вспомогательным инструментом в решении):

№ 12, 13, 23, 29, 53, 55, 78, 106, 147, 152, 186, 204.

16. Стереометрия

В решениях задач полезно рассмотреть проекции фигур на плоскость (или на прямую). Отметим также теорему, не входящую обычно в школьный курс: в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других.

№ 53, 70, 80, 82, 104, 121, 150, 188.

17. Комбинаторная геометрия

Это название относится к разнообразным оценкам, связанным с размещениями, покрытиями, различными комбинациями фигур. Здесь используются самые общие свойства, связанные с расположением фигур на плоскости (и в пространстве).

Укажем среди них теорему Жордана: любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная делит плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю, причем любой путь из точки внутренней области в точку внешней пересекает эту ломаную, а две точки каждой области можно соединить путем, не пересекающим ломаной.

Напомним определение выпуклого множества: это – множество, которое вместе с каждыми двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее эту фигуру; выпуклая оболочка конечного множества – многоугольник (в пространстве – многогранник) с вершинами в некоторых из данных точек.

Вместе с данной фигурой бывает полезно рассмотреть ее *r -окрестность*: множество точек, наименьшее расстояние от которых до точек фигуры меньше чем r ; две фигуры (в частности, точки) находятся на расстоянии не меньшем $2r$, если и только если их r -окрестности не пересекаются (задачи 12, 81).

№ 27, 49, 53, 64, 86, 147, 155, 156, 157, 164, 188, 202, 211, 215.

18. Геометрические неравенства, оценки, экстремумы

Среди многочисленных теорем, используемых в оценках и доказательстве неравенств геометрическими средствами, отметим следующие, наиболее распространенные. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других (неравенство треугольника). Угол треугольника меньше, равен или больше 90° в зависимости от того, меньше, равен или больше суммы квадратов двух прилежащих к нему сторон квадрату противоположащей стороны. Длина проекции отрезка на плоскость или прямую не больше длины этого отрезка. Площадь проекции многоугольника на любую плоскость не больше площади многоугольника.

№ 23, 29, 32, 41, 62, 70, 73, 78, 82, 84, 86, 104, 115, 121, 124, 127, 131, 134, 135, 140, 167, 185, 191, 192, 193, 202, 204, 206, 213.

19. Векторы

Кроме наиболее стандартных операций над векторами – сложения, вычитания и умножения на число – полезно использовать также скалярное произведение $\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$, где $\alpha = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Если $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, то $\mathbf{uv} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Для любых n точек плоскости (или пространства) A_1, A_2, \dots, A_n существует единственная точка O (центр тяжести) такая, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}.$$

№ 6, 13, 143, 193, 207.

20. Оценки и экстремальные задачи для наборов чисел и таблиц

Во многих олимпиадах встречаются задачи о сравнении по величине чисел из некоторого конечного набора, расположениях точек на прямой, оценках сумм, разностей и других функций, связанных с числовым набором или таблицей.

№ 56, 77, 127.

Часто в таких задачах бывает полезным:

а) выбрать наибольшее или наименьшее число из набора («принцип крайнего»):

№ 5, 26, 44, 72, 109, 126, 128, 156, 160, 163, 202, 219;
б) упорядочить числа набора по величине:
№ 34, 65, 75, 153.

21. Последовательности

Последовательность x_n называется периодической, если $x_{n+t} = x_n$, $n \in \mathbf{N}$ (натуральное число t – период). В ряде задач встречаются *рекуррентные* последовательности x_n – такие, для которых $x_{n+1} = f(x_n)$, где f – некоторая функция, либо каждый член (начиная с $(k + 1)$ -го) определяется через k предыдущих. Такова, например, последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ..., в которой каждый член равен сумме двух предыдущих. В оценках последовательностей часто помогает метод индукции, используются «огрубление» оценок и соображения монотонности.

№ 11, 15, 25, 36, 90, 100, 113.

Число a называется пределом последовательности x_n , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для любого $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

22. Игры, преследование, стратегии и алгоритмы

Решение задач, в которых речь идет о достижении цели с помощью последовательности ходов – в частности, требуется выяснить, кто из игроков побеждает в той или иной игре, – требует описания стратегии, правила выбора ходов, обеспечивающего достижение цели; в задачах про игры (или в задачах «погони», преследования) при этом требуется доказать, что стратегия обеспечивает выигрыш при любом поведении партнера,

№ 10, 57, 60, 71, 83, 91, 110, 116, 125, 168, 174, 199, 206.

23. Интересные примеры и конструкции

Во многих задачах наиболее трудная часть решения – не доказательство, а построение необычного примера.

№ 123, 156, 202, 208.

К этим задачам относятся и такие, где построение и исследование примера – многошаговая конструкция (при этом часто используется принцип индукции).

№ 64, 144, 158, 183, 200, 210.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

\mathbf{N} – множество натуральных чисел

\mathbf{Z} – множество целых чисел

\mathbf{R} – множество действительных (вещественных) чисел

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A

$A \cap B$ – пересечение (общая часть) множеств A и B

$A \cup B$ – объединение множеств A и B

$a_1 a_2 \dots a_n$ – запись n -значного числа в десятичной системе (или в системе с другим основанием, ПЗ)

$a \equiv b \pmod{m}$ – (a сравнимо с b по модулю m) остатки целых чисел a и b при делении на m равны; разность $a - b$ делится на m

$n!$ – (n факториал) произведение $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$; $0! = 1! = 1$

C_n^k – биномиальный коэффициент $n! / (k!(n-k)!)$; см. П6, П10

$[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x)

$\max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \max_i x_i$ – наибольшее из чисел x_1, x_2, \dots, x_n

$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \min_i x_i$ – наименьшее из чисел x_1, x_2, \dots, x_n

$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i$ – сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$

AB – отрезок с концами A, B ; длина этого отрезка; луч с началом A , проходящий через B ; прямая, проходящая через точки A и B

$AB : CD = AB/CD$ – отношение (длин) отрезков AB и CD

$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ – вектор с началом A и концом B

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{uv}$ – скалярное произведение векторов \mathbf{u} и \mathbf{v}

$\angle ABC (\angle (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ – угол ABC ; величина этого угла (величина угла между векторами \mathbf{u} и \mathbf{v})

$\overset{\cup}{AB} \text{ (} \overset{\cup}{AMB} \text{)}$ – дуга с концами A и B (проходящая через точку M)

$\triangle ABC$ – треугольник с вершинами A, B, C

$\triangle ABC = \triangle KLM$ – треугольники ABC и KLM равны

$\triangle ABC \sim \triangle KLM$ – треугольники ABC и KLM подобны

S_{ABC} (S_{ABCD}) – площадь треугольника ABC (четырехугольника $ABCD$)

Сборники олимпиадных задач и книги об олимпиадах

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
2. Белоусов В.Д., Изман М.С., Солтан В.П., Чиник Б.И. Республиканские математические олимпиады. – Кишинев: Штиинца, 1986.
3. Брудно А.Л., Каплан А.И. Олимпиады по программированию для школьников. – М.: Наука, 1985.
4. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986.
5. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – М.: Учпедгиз, 1963.
6. Васильев Н.Б., Савин А.П. Избранные задачи математических олимпиад. – М.: Изд-во МГУ, 1968.
7. Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976.
8. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – Киев: «Вища школа», 1984.
9. Задачи Московских математических олимпиад/Сост. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. – М.: Просвещение, 1986.
10. Избранные задачи (из журнала American Mathematical Monthly). – М.: Мир, 1977.
11. Математические олимпиады: Сб. статей/Под ред. А.М.Абрамова. – М.: Просвещение, 1988.
12. Морозова Е.А., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976.
13. Сборник задач московских математических олимпиад/Сост. Леман А.А. – М.: Просвещение, 1965.
14. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982.
15. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978.
16. Олимпиады, алгебра, комбинаторика/Под ред. Л.Я.Савельева. – Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1979.
17. Физико-математические олимпиады/Сост. Брук Ю.М., Савин А.П. – М.: Знание, 1977.

Книги из серии «Библиотечка физико-математической школы». – М.: Наука

18. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. – 1976.
19. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – 1978.
20. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – 1973.
21. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики. – 1973.
22. Кириллов А.А. Пределы. – 1973.
23. Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. Математические соревнования (геометрия). – 1974.

Книги из серии «Популярные лекции по математике». – М.: Наука

24. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 1983.
25. Виленкин Н.Я. Метод последовательных приближений. – 1968.
26. Гельфанд А.О. Решение уравнений в целых числах. – 1983.
27. Калужнин Л.А. Основная теорема арифметики. – 1969.
28. Коровкин П.П. Введение в неравенства. – 1983.
29. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. – 1983.
30. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. – 1979.

Книги из серии «Библиотека математического кружка»

31. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч. I, II. – М.: Наука, 1986.
32. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1962.
33. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1965.
34. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.
35. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). – М.: Наука, 1970.
36. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.
37. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974.
38. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Ч. I, II. – М.: Л.: Гостехиздат, 1956.
39. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. – М.: Л.: Гостехиздат, 1956.

40. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М.: Гостехиздат, 1954.

41. Зарубежные математические олимпиады / Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. / Под ред. И.Н.Сергеева. – М.: Наука, 1987.

Книги из серии «Библиотечка «Кванта»

42. Александров П.С. Введение в теорию групп. – 1980.

43. Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М. Задачи по математике (алгебра и анализ). – 1982.

44. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – 1982.

45. Занимательно о физике и математике / Сост. Кротов С.С. и Савин А.П.: Под ред. Л.Г.Асламазова. – 1987.

46. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. – 1988.

47. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – 1980.

48. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – 1986.

49. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – 1986.

Учебники, монографии

50. Башмаков М.И. Математика: Экс. Учеб. Пособие для СПТУ. – М.: Высшая школа, 1987.

51. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965.

52. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.

53. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972.

54. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.

55. Зыков А.А. Введение в теорию графов. – М.: Наука, 1987.

56. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ. – М.: Наука, 1987.

57. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 2. Геометрия. – М.: Наука, 1987.

58. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / Под ред. К.А.-Рыбинкова. – М.: Наука, 1982.

59. Математическое просвещение. Вып. 1–6. – М.: Физматгиз, 1957–1962.

60. Пойа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1978.

61. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи. М.: Наука, 1985.

62. Фаддеев Д.К. Лекции по высшей алгебре. – М.: Мир, 1983.

64. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.

Статьи из журнала «Квант»

65. Болтянский В.Г. Шесть зайцев в пяти клетках. – 1977, №2.
66. Васильев Н.Б. Расстановка кубиков. – 1972, № 4.
67. Васильев Н.Б., Гальперин Г.А. Упаковка квадратов. – 1973, № 4.
68. Васильев Н.Б., Зелевинский А.В. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения. – 1973. № 4.
69. Васильев Н.Б., Толпыго А.К. Плавные последовательности. – 1977, № 6.
70. Гальперин Г.А., Гальперин В.М. Освещение плоскости прожекторами. – 1981, № 11.
71. Гутенмахер В.Л. Косоугольные координаты и области Дирихле. 1972, № 4.
72. Лодкин А.А. Функциональное уравнение на сфере. – 1977, № 6.
73. Ионин Ю.И., Плоткин А.И. Среднее значение функции. – 1977, № 7.
74. Тоом А.Л. Из жизни единиц. – 1977, № 4.
75. Фрейвальд Р.В. Переключательные схемы. – 1972, № 2.
76. Тихомиров В.М. Об одной олимпиадной задаче. – 1983, № 1.
77. Фомин С.В. Билеты и ящики. – 1978, № 5.

Информация о всероссийских и всесоюзных олимпиадах в журнале «Математика в школе»

78. Н.А. Ермолаева, Л.М.Пашкова, Т.А.Сарычева, М.И.Башмаков, И.Н.Бернштейн, Н.Б.Васильев, Г.А.Гальперин, В.Л.Гутенмахер, Ю.В.Нестеренко, И.С.Петраков, А.С.Пономаренко, А.М.Слинько и др. 1961, № 5; 1962, № 5; 1964, № 6; 1965, № 5; 1966, № 6; 1967, № 5; 1968, № 5; 1969, № 4; 1970–1979, № 6; 1981, № 6; 1982, № 6; 1984, № 5; 1985, № 6.

Информация о всесоюзных олимпиадах в журнале «Квант»

79. В.Л.Гутенмахер, И.Н.Клумова, М.Л.Смолянский, Н.Х.Розов и др. 1970, № 5; 1971, № 11; 1972, № 10; 1973, № 9; 1974, № 10; 1975, № 11; 1976, № 11; 1977, № 11; 1978, № 10; 1979, № 11.
80. В.В.Вавилов, А.Н.Земляков, И.Н.Клумова, Л.П.Купцов, А.М.Слинько, С.В.Резниченко и др. 1980–1987, № 11.
81. Н.Н.Константинов. Шестой турнир городов. 1985, № 11.

СПИСОК АВТОРОВ ЗАДАЧ

Здесь мы постарались упомянуть тех, кто предложил наиболее оригинальные задачи и чье творчество существенно повлияло на стиль олимпиад. Как правило, очень трудно установить истинных авторов той или иной задачи – многие факты элементарной математики многократно переоткрываются; окончательный вид задача приобретает обычно в результате коллективной работы жюри. Этот список основан на публикациях об олимпиадах [78–80] и частично на наших воспоминаниях.

- Алексеев В.Б. 179 (теннис)
Арнольд В.И. 81
Башмаков М.И. 66 (турист), 82 (самолет), 157 (области Дирихле)
Бернштейн И.Н. 218
Васильев Н.Б. 49 (жук и соты), 83 (игра в сумму), 108, 143, 179, 188
Гальперин Г.А. 131, 139, 140, 153, 176, 183
Гашков С.Б. 208
Гервер М.Л. 193, 199, 202
Гейн А.Г. 216
Гинзбург Б.Д. 26 (минимум перевозок), 187
Гринберг В.С. 219 (седловая точка)
Гутенмахер В.Л. 8, 16, 145
Егоров А.А. 11
Ивлев Б.М. 105, 144, 166, 204
Ионин Ю.И. 126, 137 (из 200 чисел – 100), 168 (игра с числами)
Карзанов А.В. 215 (путь по отрезкам)
Кириллов А.А. 33 (домино), 68 (плохие числа), 75
Лапицкий В.Е. 116, 128 (циклическое неравенство), 171
Плоткин А.И. 200
Розенблум Г.В. 142, 147 (рыхлое множество), 155 (покрытие квадратами)
Савин А.П. 106
Серов М.И. 72 (астрономы), 124, 125, 133 (треугольный замок)
Скопец З.А. 205
Смоляк А.С. 65 (округление), 71
Тоом А.Л. 181 (вымирающий зверь)
Фаддеев Д.К. 98
Фомин С.В. 210, 211 (шашлык)
Фрейвальд Р.В. 174 (эксперт)

Фукс Д.Б. 63 (когомологии)
Харазишвили А.Г. 160
Ходулев А.Б. 184
Ширшов А.И. 148 (переливание)
Штейнберг А.М. 196 (голосование)
Шарыгин И.Ф. 149 (результант)
Шварц А.С. 7 (матрица)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к первому изданию	3
Условия задач	19
Решения, указания, ответы	54
Тематический путеводитель	154
Список обозначений	165
Литература	166
Список авторов задач	171

Николай Борисович Васильев, Андрей Александрович Егоров

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Часть 1

Библиотечка «Квант». Выпуск 117

Приложение к журналу «Квант» №4/2010

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 107

Формат 84x108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 5,5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 4434

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru. E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин*. Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов*. Штурм термоядерной крепости

38. *А.Д.Чернин*. Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев*. Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич*. Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский*. Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов*. Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов*. Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский*. Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь*. $\alpha, \beta, \gamma \dots Z$: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин*. Пузыри
47. *Л.С.Марочник*. Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов*. Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов*. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис*. Физика в ванне
52. *В.М.Липунов*. В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин*. Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин*. Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов*. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров*. Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин*. Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази*. Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин*. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский*. Геометрия масс
62. *Р.Фейнман*. Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов*. Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров*. Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман*. КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов*. Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков*. Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева*. Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко*. Физика полета
71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра
74. *А.Ю.Гроссберг, А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал*. Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков*. Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...

79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два зада-
ча...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических
задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие мета-
материалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный мара-
фон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные
задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Смординский*. Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гук*. Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного

Индекс 70465

60 =



Библиотечка КВАНТ

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ, А.А.ЕГОРОВ



ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД



ВЫПУСК

117